

# TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

## Proyectividad y homografía

## Homología y afinidad

## Inversión

### TEMA 4

#### Objetivos y orientaciones metodológicas

Este Tema tiene como objetivos introducir al alumno en los conocimientos de proyectividad, homografía, homología, afinidad e inversión que son de gran aplicación en estudios superiores. Es conveniente que el lector fije las ideas claras sobre las propiedades de cada una de estas transformaciones geométricas.

#### 1. Introducción

La Geometría Proyectiva estudia las propiedades geométricas que se obtienen por proyección central. Esta geometría se basa en determinadas operaciones que se realizan sobre formas geométricas concretas, el estudio de diversas transformaciones y la introducción sistemática de los elementos geométricos situados en el infinito.

El concepto de proyectividad es el fundamento de los diferentes sistemas de representación que componen la Geometría Descriptiva que más adelante será objeto de estudio.

#### 2. Formas geométricas fundamentales

Una forma geométrica es un conjunto de elementos fundamentales agrupados en especies: puntos, rectas y planos. Según se agrupen estos elementos dan lugar a las llamadas **formas fundamentales**, que se clasifican en las siguientes categorías:

##### A. Formas fundamentales de primera categoría

Son las formadas por elementos de la misma especie.

- **Serie rectilínea.** Es el conjunto de puntos que pertenecen a una recta llamada base de la serie (Fig. 1).

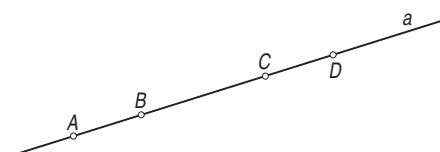


Fig. 1.

- **Haz de rectas.** Es el conjunto de rectas de un plano que pasan por un punto llamado vértice del haz (Fig. 2).

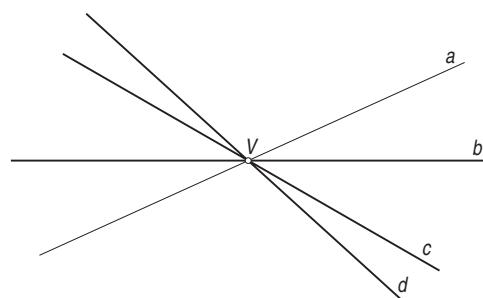


Fig. 2.

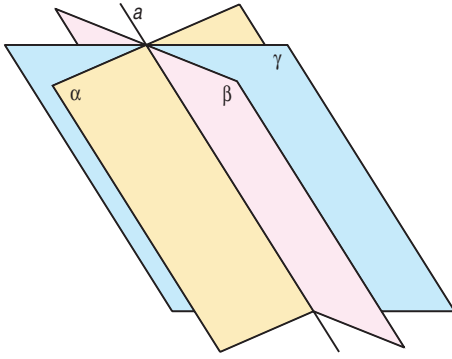


Fig. 3.

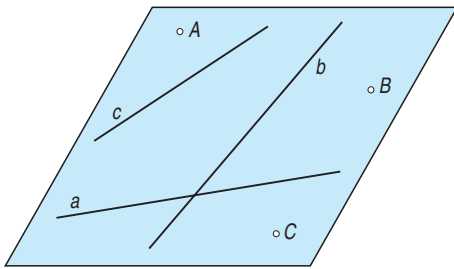


Fig. 4.

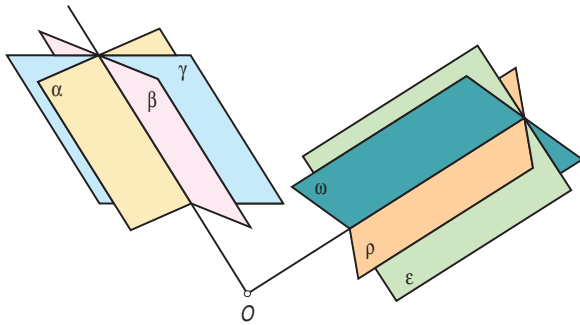


Fig. 6.

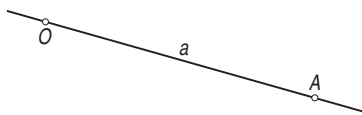


Fig. 7.

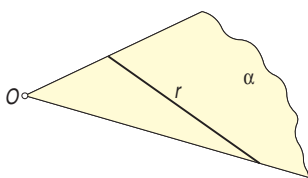


Fig. 8.

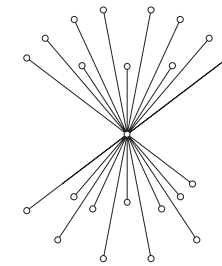


Fig. 5.

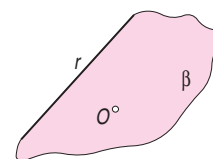


Fig. 9.

- **Haz de planos.** Es el conjunto de planos que pasan por una recta  $a$  llamada arista (Fig. 3).

### B. Formas fundamentales de segunda categoría

Son las formadas por elementos de distinta especie, además de por las de formas de primera categoría.

- **Forma plana.** Es el conjunto de **todos** los puntos y rectas que constituyen un plano (Fig. 4).
- **Radiación de rectas.** Es el conjunto de rectas del espacio que pasan por un punto (Fig. 5).
- **Radiación de planos.** Es el conjunto de planos que pasan por un punto  $O$  (Fig. 6).

### C. Formas fundamentales de tercera categoría

Es el conjunto de **todos** los puntos, las rectas y los planos del espacio, incluidas las formas de primera y segunda especie.

## 3. Operaciones básicas de la proyectividad

Son la **proyección**, desde un punto o una recta y la **sección** por una recta o un plano.

### A. Tipos de proyecciones

- **Proyección de un punto  $A$  desde otro  $O$ .** Consiste en trazar la recta  $a$  que pasa por ambos (Fig. 7).
- **Proyección de una recta  $r$  desde un punto  $O$  que no pertenece a ella.** Consiste en trazar el plano  $\alpha$  definido por ambas (Fig. 8).
- **Proyección de un punto  $O$  desde una recta  $r$  que no lo contiene.** Consiste, como en el caso anterior, en trazar el plano definido por ambos (Fig. 9).

### B. Tipos de secciones

- **Sección de una recta  $r$  por otra  $a$ .** Es la determinación del punto  $A$  común de ambas (Fig. 10).
- **Sección de un plano  $\alpha$  por una recta  $r$ , o viceversa.** Consiste en hallar el punto  $A$  común a ambos (Fig. 11).
- **Sección de un plano  $\alpha$  por otro  $\beta$ .** Consiste en determinar la recta  $r$  común a ambos (Fig. 12).

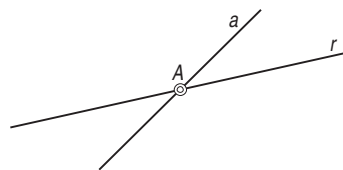


Fig. 10.

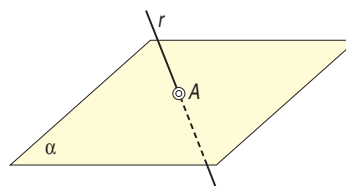


Fig. 11.

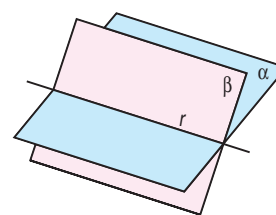


Fig. 12.

### 4. Relaciones entre proyección y sección

- Al proyectar una serie rectilínea,  $A, B, C, \dots$  etc., de una recta  $r$ , desde un punto  $O$  exterior a ella, se obtiene un haz de rectas,  $a, b, c, \dots$  etc., de vértice  $O$  que pertenecen al plano definido por  $O$  y  $r$  (Fig. 13).

Pero, también a la recíproca, la sección de un haz de rectas,  $a, b, c, \dots$  etc., por otra recta  $r$ , que no pase por el vértice  $O$  del haz, produce una serie rectilínea,  $A, B, C, \dots$  etc.

- Si proyectamos una serie rectilínea,  $A, B, C, \dots$  etc., de una recta  $r$ , desde otra recta  $m$ , no coplanaria con  $r$ , se obtiene un haz de planos  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  etc., cuya arista es  $m$  (Fig. 14).

Ahora bien, si seccionamos un haz de planos  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  etc., de arista es  $m$  por una recta  $r$ , no coplanaria con ella, se obtiene una serie rectilínea,  $A, B, C$ .

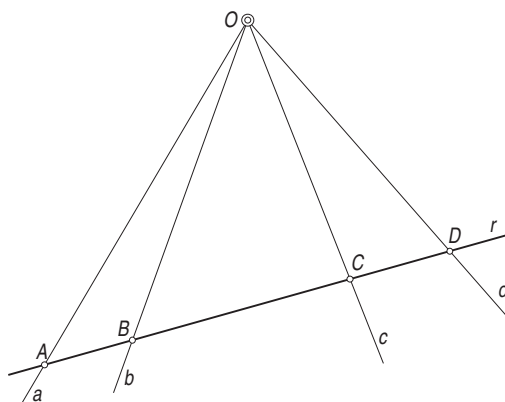


Fig. 13.

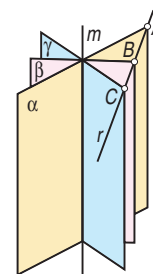


Fig. 14.

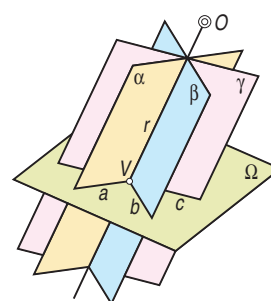


Fig. 15.

- La proyección de un haz de rectas,  $a, b, c, \dots$  etc., de vértice  $V$  desde un punto  $O$  exterior al haz, produce un haz de planos,  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  etc., cuya arista  $r$  es la proyección de  $V$  desde  $O$  (Fig. 15).

Así mismo, la sección de un haz de planos  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  etc., de arista  $r$ , por otro plano  $\Omega$ , que no contiene a la arista, determina un haz de rectas,  $a, b, c, \dots$  etc., cuyo vértice  $V$  es la intersección de la arista  $r$  por el plano  $\Omega$ .

- Al proyectar una forma plana  $ABCDE$  desde un punto  $O$  exterior a ella, se obtiene una superficie radiada de vértice  $O$  (Fig. 16). Del mismo modo, la sección de una superficie radiada de vértice  $O$  por un plano  $\alpha$  que no contiene a éste produce una forma plana  $ABCDE$ .

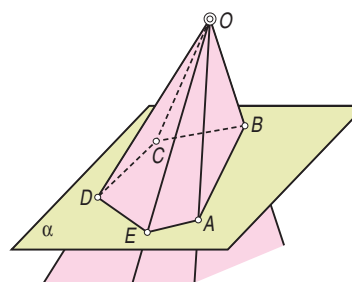


Fig. 16.

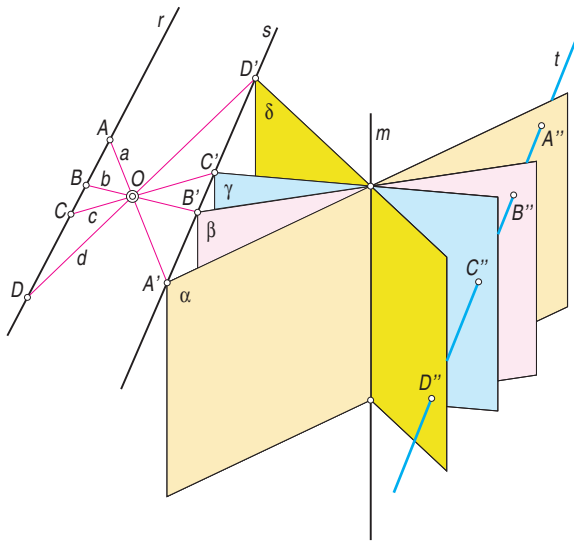


Fig. 17.

## 5. Haces y secciones proyectivos

Sea la serie rectilínea  $A, B, C$  y  $D$  contenida en la recta  $r$  y el punto  $O$ , exterior a ésta de la Fig. 17. Proyectando la citada serie desde el punto  $O$  se obtiene el haz de rectas  $a, b, c$  y  $d$ .

Al seccionar este haz por otra recta  $s$  se produce otra serie rectilínea  $A', B', C'$  y  $D'$ .

Si se proyecta esta última serie desde una recta  $m$ , no coplanaria con  $s$ , tenemos un haz de planos  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$ , cuya arista es la recta  $m$ , que al seccionarlo por otra recta  $t$ , no coplanaria con  $m$ , dará otra serie  $A'', B'', C''$  y  $D''$ .

Todas estas formas de primera categoría, series y haces, se dice que son proyectivos entre sí.

Del mismo modo, mediante proyecciones y secciones sucesivas se puede pasar de una forma de segunda categoría  $ABCD$  a otras,  $abcd, A'B'C'D', \dots$  etc., que son entre ellas proyectivas (Fig. 18).

De lo anterior se puede enunciar:

**Dos formas de primera o de segunda categoría se llaman proyectivas entre sí cuando se obtienen una de otra por una sucesión de proyecciones y secciones.**

La transformación que permite pasar de la primera a la segunda se dice que es inversa de la que transforma la segunda en la primera. Estas transformaciones se llaman proyectivas.

## 6. Homografía

Se denomina homografía a cualquier transformación proyectiva que establece una correspondencia entre dos formas geométricas, de modo que a un elemento, punto o recta, de una de ellas le corresponde otro elemento de la misma especie, punto o recta, de la otra.

Transformaciones **homográficas** son: la **traslación**, las **simetrías**, el **giro**, la **homotecia**, así como la **homología** y, su caso particular, la **afinidad**, que se estudian a continuación.

## 7. Homología plana

Es una transformación homográfica resultante de efectuar una proyección desde un punto, en la que a cada uno de los puntos y de las rectas de una figura plana le corresponden, respectivamente, un punto y una recta de su figura homológica, de modo que:

- 1º. Las parejas de puntos homológicos  $A$  y  $A', B$  y  $B', \dots$  etc., están alineados con otro punto fijo  $O$ , llamado **centro de homología**.
- 2º. Las parejas de rectas  $r$  y  $r', s$  y  $s', \dots$  etc., se cortan en puntos pertenecientes a una recta fija  $e$ , llamada **eje de homología**.

En la Fig. 19 al triángulo  $ABC$  le corresponde el  $A'B'C'$  en una homología de centro  $O$  y eje  $e$  y se cumplen las

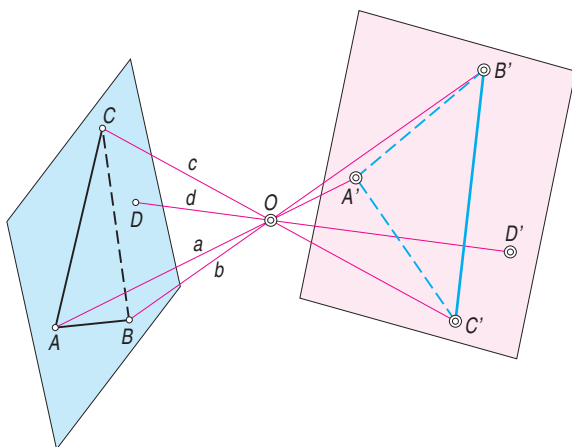


Fig. 18.

dos condiciones establecidas: las parejas de puntos homológicos  $A$  y  $A'$ ,  $B$  y  $B'$  y  $C$  y  $C'$  pertenecen a rectas que concurren en  $O$ , llamadas rayos de homología, y, por otra parte, las rectas  $r$  y  $s$  se cortan, respectivamente, con sus homológicas  $r'$  y  $s'$  en los puntos  $1 \equiv 1'$  y  $2 \equiv 2'$  del eje. La recta  $t$ , que pasa por los puntos  $A$  y  $B$ , y su homológica  $t'$ , que contiene a  $A'$  y  $B'$ , son paralelas al eje, por tanto, cumplen la condición de cortarse en un punto de éste que, en este caso, se trata del punto impropio o del infinito.

### 8. Elementos dobles en la homología

Como puede comprobarse en la Fig. 19 la homología es una transformación de **haz doble**, conjunto de rectas que pasan por su centro  $O$ , ya que la recta  $OA$  coincide con  $OA'$ , la  $OB$  con  $OB'$ ,... etc., y de **serie lineal doble**, conjunto de puntos donde el eje  $e$  corta al haz doble anterior. Por tanto, los puntos dobles, es decir, homológicos de sí mismos, son el centro de homología  $O$  y los que pertenecen al eje  $e$ .

En consecuencia:

- Si una recta corta al eje, su homológica también lo cortará en el mismo punto.
- Si una figura es tangente al eje, su homológica también lo será en el mismo punto.
- Si una figura no tiene puntos comunes con el eje, su homológica tampoco los tendrá.
- Si una figura pasa por el centro  $O$ , su homológica también pasa por él. Si estas figuras son curvas, serán tangentes en el citado centro.

En una homología hay, además, algunas rectas dobles, estas son: el eje, que, por lo visto anteriormente, lo es punto a punto, y las rectas que forman el haz concurrente en  $O$ , aunque sólo tienen dos puntos dobles, el propio punto  $O$  y los puntos  $L \equiv L'$ ,  $M \equiv M'$ ,  $N \equiv N'$ ,... etc., donde cortan al eje  $e$  (Fig. 19).

### 9. Rectas límites

En una homología se puede calcular el punto homológico de un punto impropio o del infinito.

Sea la homología de la Fig. 20 definida por su centro  $O$ , el eje  $e$  y la pareja de rectas  $r$  y  $r'$ . El homológico del punto  $P_\infty$ , impropio de la recta  $r$ , debe pertenecer a  $r'$  y estar alineado con  $O$  y  $P_\infty$ , por lo tanto,  $P'$  es el punto de intersección con  $r'$  de la paralela a  $r$  por  $O$ .

Del mismo modo, el punto  $Q$ , homológico de  $Q'_\infty$ , punto impropio de la recta  $r'$ , será la intersección con  $r$  de la paralela por  $O$  a  $r'$ .

Apliquemos lo anterior a los puntos impropios o del infinito de figuras homológicas entre sí.

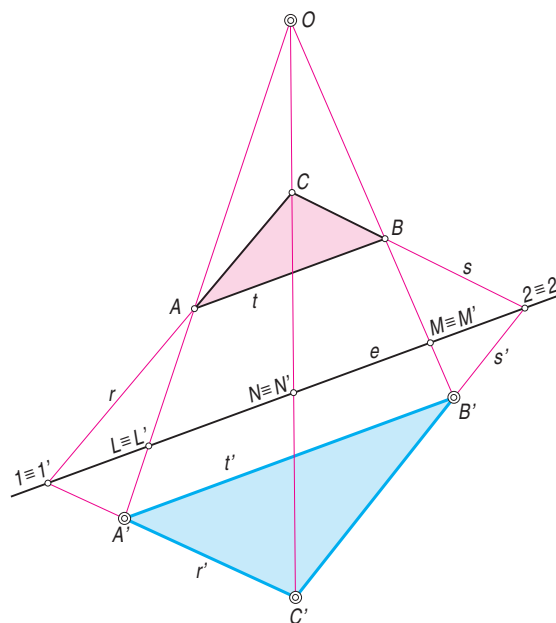


Fig. 19.

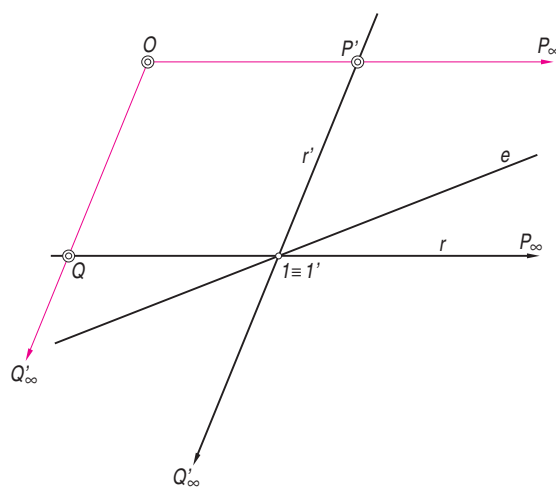


Fig. 20.

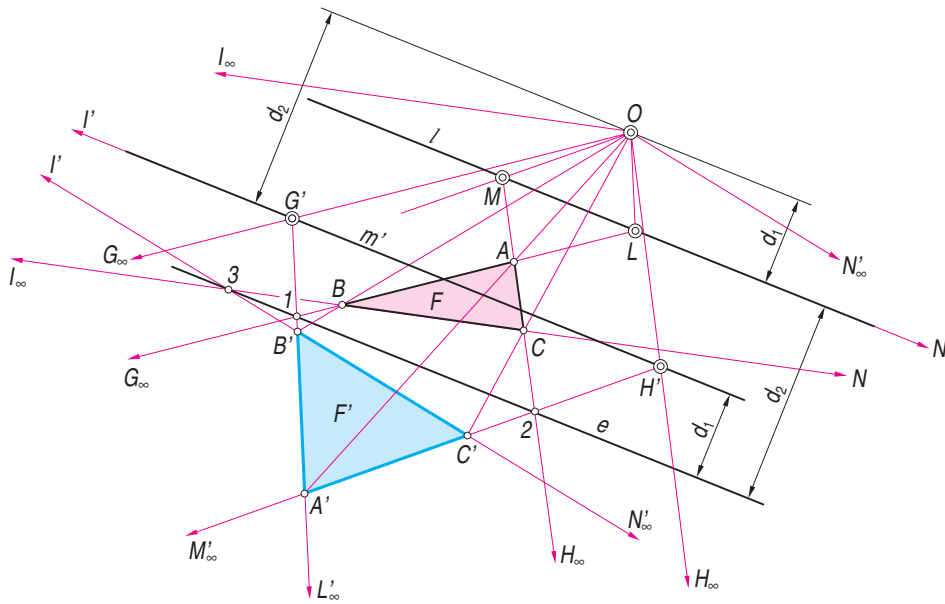


Fig. 21.

Los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  de la Fig. 21 se corresponden en una homología de centro  $O$  y eje  $e$ . Los puntos impropios asociados al primero,  $G_{\infty}, H_{\infty}$  e  $I_{\infty}$ , tienen como homólogos, respectivamente,  $G', H'$  e  $I'$  que pertenecen a una recta  $m'$ , en la que se encuentran los homólogos de todos los puntos impropios de la figura  $F$ .

Repetiendo la operación con la figura  $F'$ , triángulo  $A'B'C'$ , a la que se asocian los puntos impropios  $L'_{\infty}, M'_{\infty}$  y  $N'_{\infty}$ , sus homólogos,  $L, M$  y  $N$  pertenecen a la recta  $l$ , lugar geométrico de los homólogos de los puntos impropios de la figura  $F'$ .

Ambas rectas,  $m'$  y  $l$  se llaman **rectas límite** y son las homólogas de las rectas impropias asociadas, respectivamente, a las figuras  $F$  y  $F'$ , es decir,  $m'$  es la homóloga de la recta  $m$ , recta impropia asociada a  $F$ , y  $l$  lo es de  $l'$ , recta impropia asociada a  $F'$ . Esta es la razón por la que **las dos rectas límite son paralelas al eje  $e$** , ya que, cada una de ellas, debe concurrir con su homóloga en un punto de éste.

Otra propiedad importante de las rectas límite es que cada una de ellas dista del eje lo mismo que la otra del centro de homología y a la inversa. La distancia  $d_1$  de  $m'$  al eje  $e$  es la misma que hay de  $l$  a  $O$ , pero del mismo modo, la distancia  $d_2$  de  $m'$  a  $O$  es la misma que hay de  $l$  al eje  $e$ . Esto es fácilmente verificable si observamos los paralelogramos  $OG'1L$  y  $OH'2M$  de la Fig. 21. En ambos casos el primer punto es el centro de homología, el segundo pertenece a  $m'$ , el tercero se halla en el eje y el cuarto se encuentra en  $l$ .

Si, como ocurre en la Fig. 21, la recta  $l$  no corta a la figura  $F$  ni  $m'$  corta a  $F'$ , la homóloga de una figura cerrada es otra figura cerrada. Obsérvese que siguen siendo cerradas aunque  $l$  corte a  $F'$  o, como ocurre en este caso,  $m'$  corta a  $F$ .

Cuando una de las figuras  $F$  o  $F'$  tiene un vértice en  $l$  o en  $m'$ , respectivamente, su homóloga es una figura abierta con un punto impropio (Fig. 22).

El homólogo del punto  $C$ , que pertenece a la recta límite  $l$ , es, por la definición anterior, un punto impropio. Por tanto, las rectas  $A'C'_{\infty}$  y  $B'C'_{\infty}$  deben cortarse en el infinito, luego son paralelas.

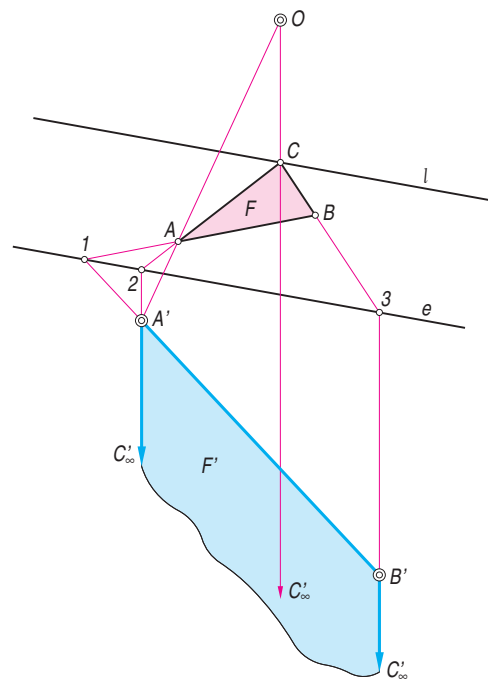


Fig. 22.

En el caso de que la recta límite  $l$  sea secante a la figura  $F$  o  $m'$  lo sea a  $F'$  su figura homóloga correspondiente se compone de dos partes abiertas (Fig. 23).

Al lado  $\overline{AC}$  de la figura  $F$  le corresponde el "segmento"  $\overline{A'C'}$  que, para ir de un extremo a otro, ha de pasar por el punto impropio  $M'_{\infty}$ , homólogo de  $M$ , que pertenece a la recta límite  $l$ . Del mismo modo, al lado  $\overline{BC}$ , que tiene uno de sus puntos  $N$ , en la recta  $l$ , le corresponde  $\overline{B'C'}$ , uno de cuyos puntos,  $N'_{\infty}$ , es impropio. Por tanto, la figura  $F'$  resulta "partida".

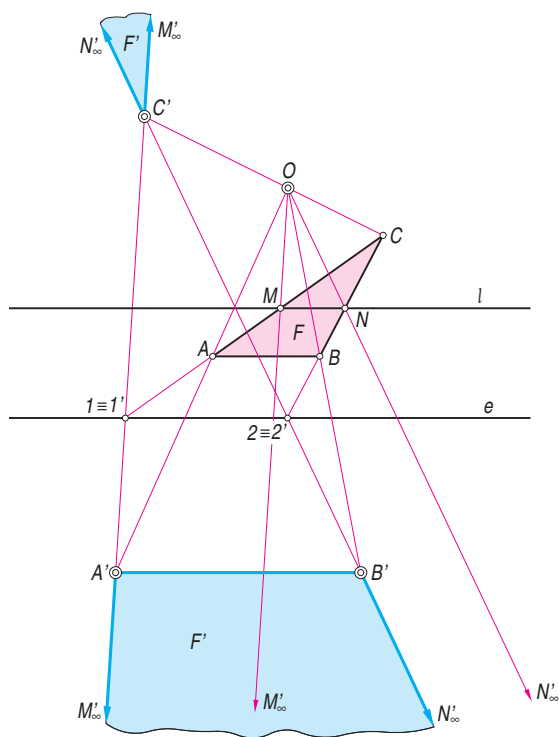


Fig. 23.

### 10. Datos necesarios para definir una homología

Para definir una homología son necesarios tres datos de entre: el eje, el centro, una pareja de puntos, una pareja de rectas, la dirección del eje, una de las rectas límites, etc. De entre todos los casos posibles, y además del caso expuesto en la Fig. 20, se exponen a continuación algunos, realizando su resolución hasta convertirlos en el primero de ellos cuya solución es inmediata.

#### 1º. Datos el centro $O$ , el eje $e$ y una pareja de puntos homológicos $A$ y $A'$ (Fig. 24)

Para calcular la figura  $F'$ , a partir de los datos enunciados y de la figura  $F$ , se procede como sigue:

El vértice  $B'$  de la figura  $F'$  debe pertenecer al rayo de homología  $OB$  y a la recta  $1A'$ , homológica de la recta  $AB$  que corta al eje en el punto  $1$ . El punto donde se cortan ambas es el punto buscado  $B'$ .

Para calcular el resto de de los vértices se procede de la misma forma. Téngase en cuenta que los puntos que se van determinando permiten disponer de más parejas de puntos homológicos en los que apoyarse, en caso necesario, para calcular los vértices restantes.

Se advierte que las parejas de puntos homológicos que pertenecen al eje, es decir, los puntos dobles, no sirven como dato para determinar una homología.

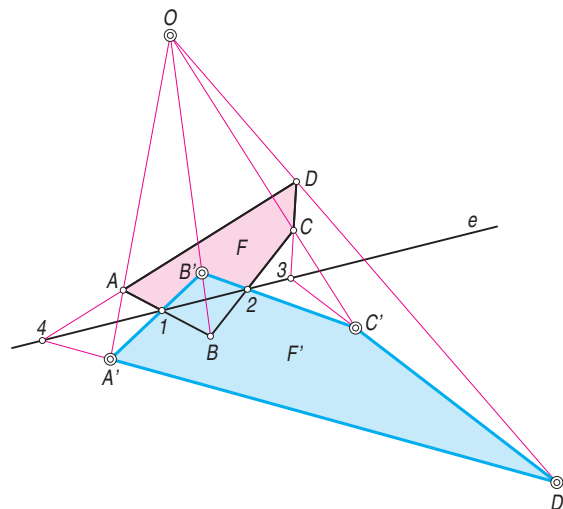


Fig. 24.

#### 2º. Datos dos parejas de puntos homológicos $A-A'$ y $B-B'$ y la dirección $d$ del eje de homología (Fig. 25)

El centro de homología  $O$  se halla en la intersección de los rayos  $AA'$  y  $BB'$ . El eje  $e$ , paralelo a la dirección  $d$  dada, pasa por el punto  $1 \equiv 1'$  donde se cortan las rectas homológicas  $AB$  y  $A'B'$ .

Una vez conocidos el centro y el eje de homología, el proceso para hallar el resto de los vértices de la figura  $F'$  es el descrito en el caso anterior.

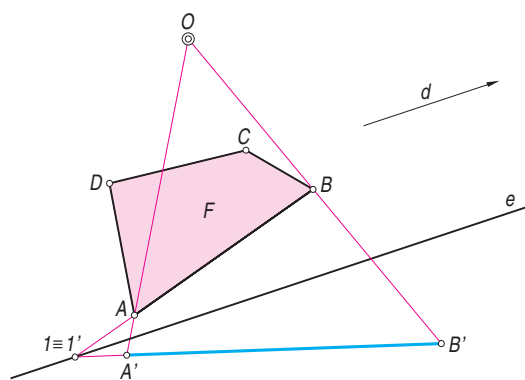


Fig. 25.

#### 3º. Datos el centro $O$ , el eje $e$ y la recta límite $l$ (Fig. 26)

Dada la figura  $F$ , se trata de calcular el homológico de uno de sus vértices, por ejemplo  $A'$ , para convertirlo en el caso 1º.

Al punto  $M$ , perteneciente a la recta  $AB$  y a  $l$ , le corresponde  $M''_{\infty}$ , punto impropio alineado con  $M$  y



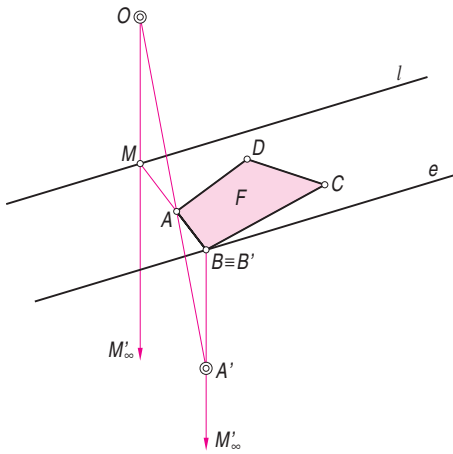


Fig. 26.

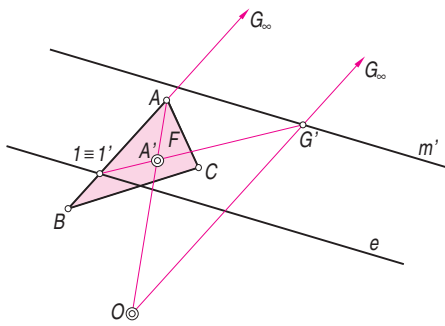


Fig. 27.

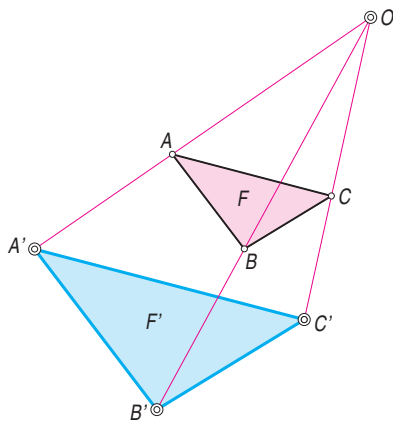


Fig. 28.

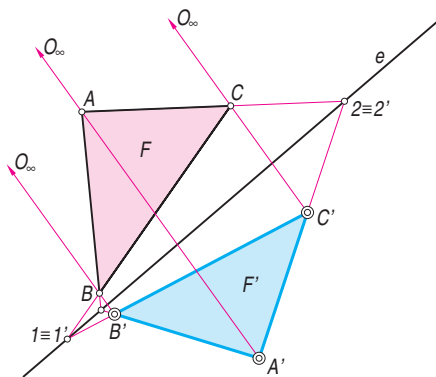


Fig. 30.

con  $O$ . El punto  $A'$ , que ha de pertenecer a la recta  $B'M'_{\infty}$ , se encuentra en la intersección del rayo de homología  $OA$  con la paralela por  $B$  a la recta  $OM'_{\infty}$ .

**4º. Dados el centro  $O$ , el eje  $e$  y la recta límite  $m'$  (Fig. 27)**

Como en el caso anterior, se trata de calcular el homológico de uno de los vértices de la figura  $F$ .

El punto  $G'$ , correspondiente a  $G_{\infty}$ , que pertenece a la recta  $AB$ , debe ser un punto de la recta límite  $m'$  dada y del rayo de homología  $OG_{\infty}$ , por tanto, es la intersección con  $m'$  de la paralela por  $O$  a la recta  $AB$ .

El punto  $A'$  se halla en la intersección del rayo  $OA$  con la recta  $G'1'$ , homológica de la que contiene a los puntos  $A, B, G_{\infty}$  y  $1$ . Este último punto es doble por pertenecer al eje  $e$ .

**11. Homologías de condiciones especiales**

Si en una homología, el eje, el centro, o ambos al mismo tiempo se hacen impropios, es decir, se hallan en el infinito, resultan transformaciones consideradas casos límites de homología. Algunas de ellas se han estudiado en el curso pasado.

**1º. Eje impropio (Fig. 28)**

Los puntos donde se deben cortar las parejas de rectas homológicas son impropios, por lo que éstas son paralelas. Esta condición convierte a la homología en una **homotecia** de centro  $O$  y razón:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \text{constante}$$

Si además, el valor de esta razón es  $-1$  resulta una **simetría central** o un giro de  $180^\circ$ , que son lo mismo (Fig. 29).

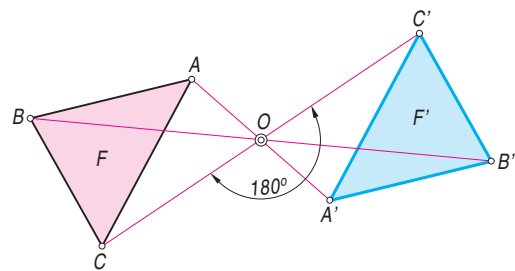


Fig. 29.

**2º. Centro impropio (Fig. 30)**

El punto de concurrencia de los rayos de homología es un punto del infinito, por lo que son paralelos.

A este caso particular, llamado **homología afín** o, simplemente, **afinidad**, se le dedica a continuación un análisis más detallado, por su importancia en el estudio de los sistemas de representación que se estudiarán más adelante.



### 3º. Centro y eje impropios (Fig. 31)

Por una parte, los rayos de homología serán paralelos y por otra las parejas de rectas homológicas también lo serán. Estas características convierten a esta homología en una **traslación** cuya dirección es la de escape del punto  $O$  para hacerse impropio.

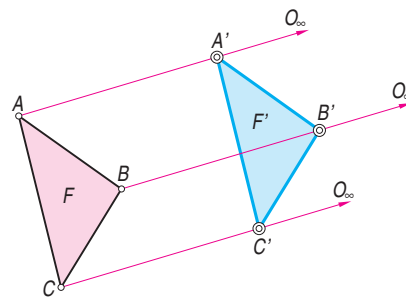


Fig. 31.

## 12. Afinidad

Como se ha visto anteriormente, esta transformación es un caso límite de homología, cuando el centro es impropio. Por tanto, las condiciones que se deben cumplir en la afinidad son:

- 1ª. Las parejas de puntos afines  $A$  y  $A'$ ,  $B$  y  $B'$ ,... etc., se hallan sobre rectas paralelas entre sí y paralelas a una dirección determinada, llamada **dirección de afinidad**.
- 2ª. Las parejas de rectas  $r$  y  $r'$ ,  $s$  y  $s'$ ,... etc., se cortan en puntos que pertenecen a una recta fija, llamada **eje de afinidad**.

En la Fig. 32 al cuadrilátero  $ABCD$  le corresponde el  $A'B'C'D'$  en una afinidad de eje  $e$  y dirección  $d$ . Puede comprobarse que se mantienen las condiciones de una homología, excepto que el haz de rayos concurre, en este caso, en un punto impropio en la dirección  $d$ .

En la afinidad los únicos puntos dobles son los del eje. Los afines de los puntos impropios también están en el infinito. Por esta causa, en la afinidad no se toman en consideración las rectas límites que son impropias.

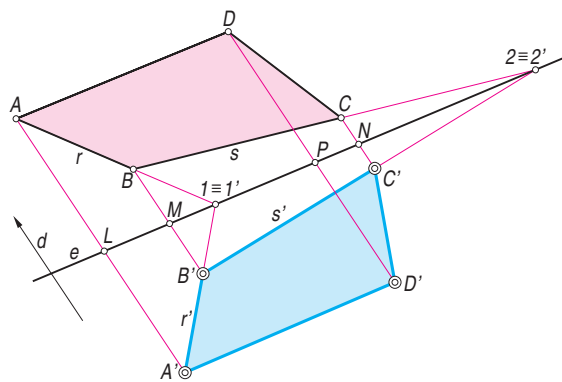


Fig. 32.

### 12.1. Razón de afinidad

En una afinidad, la distancia de un punto al eje y la de su correspondiente afín, tomadas ambas en la recta que los une, están en una relación constante.

Por tanto, en la Fig. 32 se cumple:

$$\frac{\overline{A'L}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{B'M}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{C'N}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{D'P}}{\overline{DP}} = K$$

Siendo  $K$  una constante llamada **razón de afinidad**.

Si el valor de  $K$  es positivo, una pareja de elementos afines: puntos, segmentos o figuras, se hallan en el mismo semiplano respecto del eje (Fig. 33).

Cuando el valor de  $K$  es negativo cada elemento está situado a distinto lado de su afín respecto del eje (Fig. 32).

Aunque la dirección de afinidad y el eje pueden formar un ángulo cualquiera, en ocasiones ambas son perpendiculares, diciéndose entonces que la afinidad es **ortogonal** (Fig. 33).

Cuando en una afinidad ortogonal la razón tiene valor  $K = -1$ , se cumplirá:

$\overline{A'L} = \overline{AL}$ ;  $\overline{B'M} = \overline{BM}$ ,... y en este caso la afinidad es también una **simetría axial** cuyo eje es el de afinidad (Fig. 34).

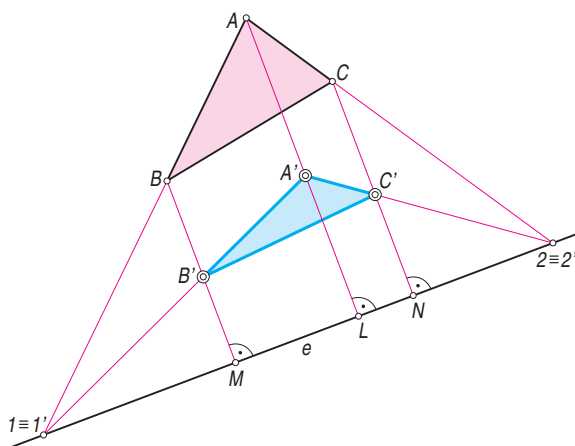


Fig. 33.

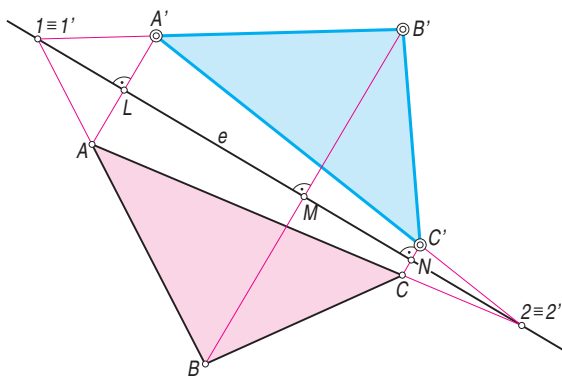


Fig. 34.

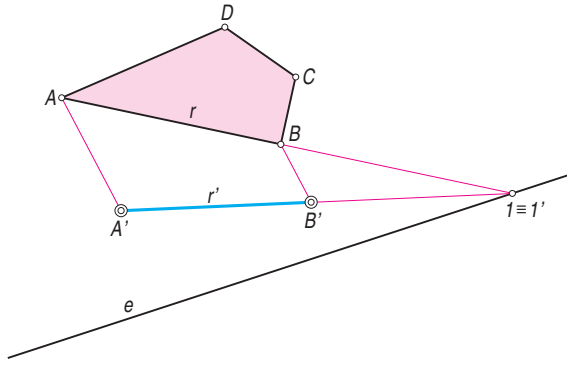


Fig. 35.

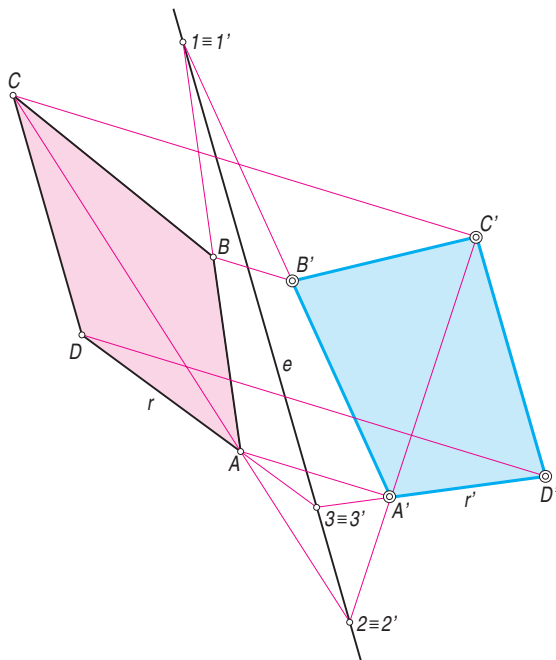


Fig. 36.

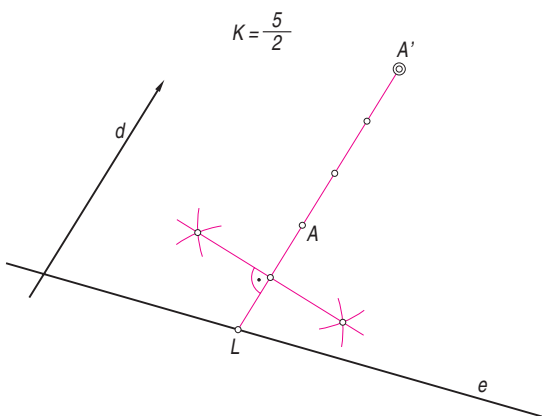


Fig. 37.

### 13. Datos que definen una afinidad

Los datos necesarios que con más frecuencia dispondremos para definir una afinidad son:

**1º. El eje e y una pareja de puntos afines A y A' (Fig. 35)**

Si conocemos una pareja de puntos afines conocemos la dirección de afinidad que, en este caso, la determina la recta AA'.

El punto B', afín de otro dado, B, se halla en la paralela por éste a la recta AA' y en la recta r', afín de r, que pasa por A y B y corta al eje en el punto doble 1 ≡ 1'.

**2º. Dos triángulos afines (Fig. 36)**

En la afinidad que determinan los triángulos ABC y A'B'C' se pide calcular el cuadrilátero afín al ABCD.

Para hallar el punto D', afín del cuarto vértice D, es preciso determinar la dirección de afinidad y el eje. La primera resulta ser la de las rectas AA', BB' y CC', y el eje resulta del cálculo de dos de sus puntos, 1 ≡ 1', donde se cortan las rectas AB y A'B' y 2 ≡ 2', intersección de AC y A'C'.

El punto D' es la intersección de la paralela por D a CC' con la recta r' afín de r.

**3º. El eje e, la razón de afinidad K y la dirección d (Fig. 37)**

Sea, por ejemplo,  $K = 5/2$ , para calcular A', afín del punto A dado, y convertir este caso en el primero de los presentados, se traza por A la paralela a d, que corta al eje en L. Se divide el segmento AL en dos partes iguales, siendo estas dos divisiones las que corresponden al denominador de la razón de afinidad. El punto A' se halla en la recta AL a una distancia de L igual a cinco divisiones y al mismo lado de A respecto del eje e por tener la razón valor positivo.

Téngase en cuenta que si la afinidad que convierte al punto A en A' tiene como razón  $K = 5/2$ , la que convierte A' en A es  $K_1 = 2/5$ . Por esto, conviene fijar la posición que ocupa, en la fracción que determina el valor de la razón, la medida de cada uno de los segmentos, que en la Fig. 37 es:

$$\frac{A'L}{AL} = K = \frac{5}{2}$$

### 14. Afinidad entre circunferencia y elipse

La relación de afinidad que puede establecerse entre una circunferencia y una elipse tiene aplicación práctica muy importante en los sistemas de representación que se basan en la proyección cilíndrica, como podrá comprobarse más adelante. Por ello, determinamos la elipse afín de una circunferencia.

Sea la afinidad definida por el eje  $e$ , la dirección  $d$  y la razón  $K = -3/4$  y la circunferencia de centro  $Q$  de la Fig. 38.

Para calcular el centro  $Q'$  de la elipse afín del centro de la circunferencia se traza por  $Q$  la paralela a la dirección  $d$ , la cual corta al eje en el punto  $L$ . Se divide el segmento  $QL$  en cuatro partes iguales y el punto  $Q'$  se halla al lado contrario de  $Q$  respecto del eje  $e$ , por tener razón negativa, a una distancia de  $L$  de tres de esas partes.

A una pareja cualquiera de diámetros perpendiculares de la circunferencia, por ejemplo  $AC$  y  $BD$ , le corresponde una pareja de diámetros conjugados de la elipse, en este caso  $A'C'$  y  $B'D'$ . Con estos dos diámetros conjugados se puede construir la elipse.

Se puede obtener la elipse por medio de sus ejes. En la Fig. 39 se parte de los mismos datos que en la figura anterior y se determinan los ejes de la elipse afín de la circunferencia de centro  $Q$ .

Una vez determinado el centro  $Q'$  de la elipse, como se ha explicado anteriormente, se trata de calcular los puntos del eje que al unirlos con los centros,  $Q$  y  $Q'$ , de las dos curvas den, en ambos casos, una pareja de rectas perpendiculares.

Los puntos que se buscan  $1 \equiv 1'$  y  $2 \equiv 2'$ , son los extremos del diámetro de la circunferencia que pasa por los puntos  $Q$  y  $Q'$  y tiene el centro  $P$  en el eje  $e$ . Dicho de otro modo, el segmento cuyos extremos son los puntos  $1 \equiv 1'$  y  $2 \equiv 2'$  se ha de ver desde los puntos  $Q$  y  $Q'$  bajo ángulos de  $90^\circ$ . Para esto se traza la mediatriz de  $Q-Q'$  que corta en  $P$  al eje.

Los diámetros perpendiculares  $AC$  y  $BD$  de la circunferencia tienen como afines, respectivamente, el eje menor  $A'C'$  y el mayor  $B'D'$  de la elipse.

En el caso de que la afinidad sea ortogonal, es decir, que la dirección de afinidad sea perpendicular al eje, caso que se da en la Fig. 40 y muy frecuente en las aplicaciones basados en las proyecciones cilíndricas, la pareja de diámetros de la circunferencia que se transforman en los ejes de la elipse es la que forman el paralelo,  $AC$ , al eje  $e$ , que se transforma en  $A'C'$ , eje mayor de la elipse, y el perpendicular,  $BD$ , a  $e$ , al que corresponde  $B'D'$ , eje menor de la curva.

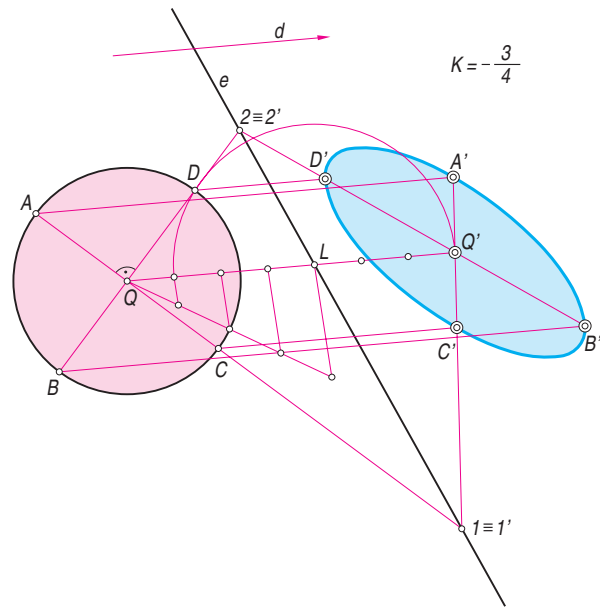


Fig. 38.

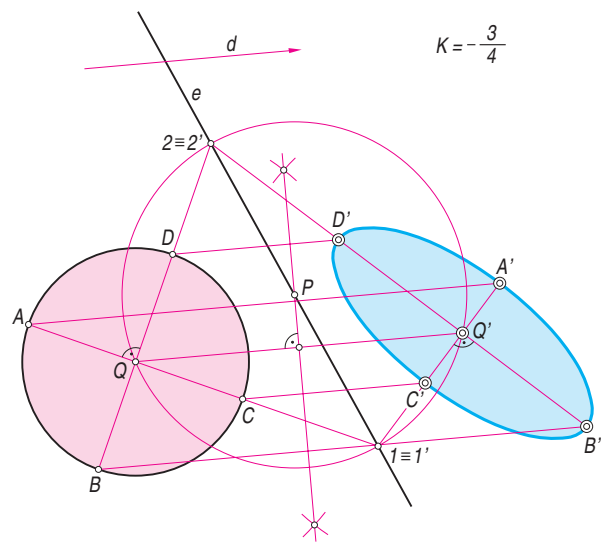


Fig. 39.

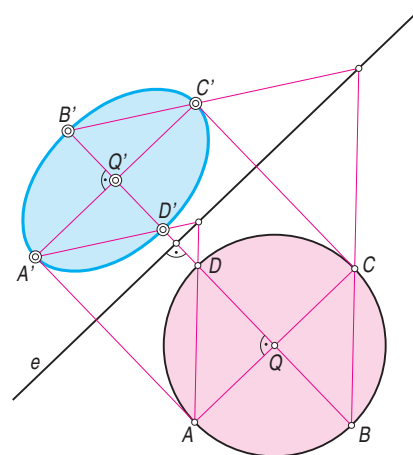


Fig. 40.

### 15. Inversión. Definición y tipos

La inversión es una transformación que hace corresponder a un punto  $A$  otro  $A'$  cumpliendo las siguientes condiciones:

- 1ª. Ambos puntos están alineados con otro punto fijo,  $O$ , llamado **centro de inversión**.
- 2ª. El producto de las distancias de ambos puntos al citado centro de inversión es un valor constante,  $K$ , llamado **potencia de inversión**, es decir:

$$OA \cdot OA' = K$$

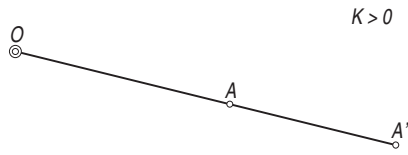


Fig. 41.

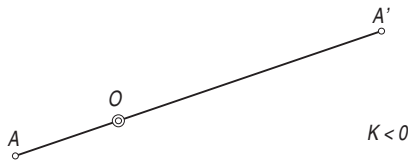


Fig. 42.

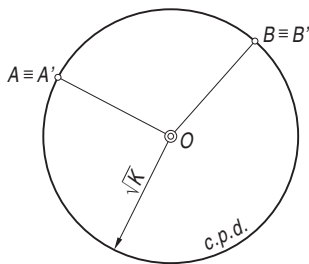


Fig. 43.

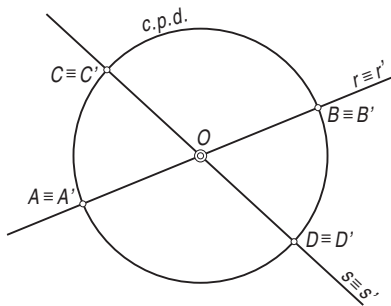


Fig. 44.

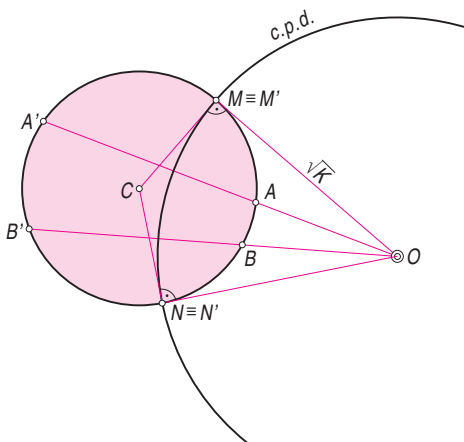


Fig. 45.

Para valores positivos de  $K$ , una pareja de puntos inversos se hallan del mismo lado de  $O$ , tratándose de una inversión positiva (Fig. 41).

Si  $K$  es un número negativo, los puntos  $A$  y  $A'$  se encuentran uno a cada lado del centro, diciéndose entonces que la inversión es negativa (Fig. 42).

### 16. Elementos y figuras dobles en una inversión

Los únicos puntos dobles, es decir, inversos de sí mismos en una inversión en la que se cumpla  $K > 0$ , son aquellos que distan  $\sqrt{K}$  del centro  $O$ , ya que  $\sqrt{K} \cdot \sqrt{K} = K$ , que es la potencia de inversión.

Al tratarse de puntos que se hallan a una distancia constante del centro de inversión, determinan una circunferencia cuyo centro es el de inversión,  $O$ , y su radio la raíz cuadrada de su potencia,  $\sqrt{K}$  (Fig. 43).

Esta circunferencia, lugar geométrico de los puntos inversos de sí mismos en una inversión positiva, recibe el nombre de circunferencia de puntos dobles (c.p.d.) o de autoinversión.

En la inversión negativa no existen puntos dobles, ya que un punto y su inverso se hallan a distinto lado de  $O$ , luego no pueden coincidir. En consecuencia, si  $K < 0$ , la inversión no tiene c.p.d., lo cual es lógico ya que  $\sqrt{-K}$  es un número que no tiene solución real.

Aunque la única figura doble que lo es punto a punto es la c.p.d., en una inversión hay una serie de elementos o figuras que son dobles porque el inverso de uno de sus puntos es otro punto que también pertenece a ella.

Son dobles las rectas que pasan por el centro de inversión, aunque sólo dos de sus puntos son dobles, los que pertenecen también a la c.p.d. (Fig. 44).

También son dobles las circunferencias respecto de las cuales el centro de inversión tenga una potencia igual a la de inversión  $K$ , si la potencia es positiva, caso de la Fig. 45, o  $-K$  si es negativa, como en la Fig. 46.

En el primer caso se cumple:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OM}^2 = \overline{ON}^2 = K$$

y en el segundo:

$$\overline{OD} \cdot \overline{OD'} = \overline{OE} \cdot \overline{OE'} = -K$$

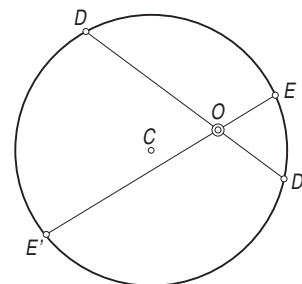


Fig. 46.

De lo anterior se deduce que: **cualquier circunferencia que pase por una pareja de puntos inversos es figura doble**, aunque, si la inversión es positiva, solo tiene dos puntos dobles, los que pertenecen a su vez a la *c.p.d.*,  $M \equiv M'$  y  $N \equiv N'$  en la Fig. 45, y si la inversión es negativa no tiene ninguno (Fig. 46).

A partir de la deducción anterior, también se puede afirmar que: **dos parejas de puntos inversos son concíclicos**, es decir, hay una circunferencia que contiene a los cuatro.

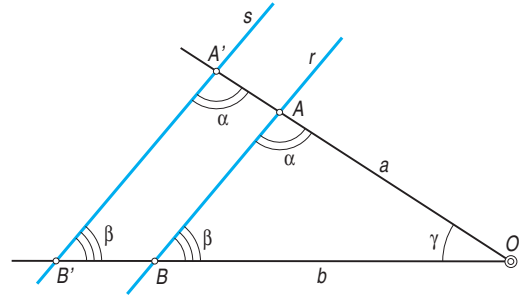


Fig. 47.

### 17. Rectas antiparalelas

Sabemos, por el teorema de Thales, que al cortar a dos rectas,  $a$  y  $b$ , concurrentes en  $O$  por dos rectas paralelas,  $r$  y  $s$ , se obtienen dos triángulos  $OAB$  y  $OA'B'$ , semejantes por tener los tres ángulos iguales y, como consecuencia, los lados proporcionales (Fig. 47).

Por tanto:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$

Pero también se puede obtener una pareja de triángulos semejantes al cortar a dos rectas concurrentes,  $a$  y  $b$ , por dos rectas no paralelas,  $m$  y  $n$  que se les denomina **antiparalelas** respecto de las  $a$  y  $b$ , y que, a su vez, son antiparalelas de  $m$  y  $n$ .

De lo anterior y del análisis de las Figs. 48 y 49 resulta:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$$

que se transforma en:

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$$

que como se ha visto anteriormente, demuestra que los puntos  $A$  y  $B$  tienen como inversos respectivos  $A'$  y  $B'$  en una inversión de centro  $O$  y que, como ha quedado demostrado, pertenecen a una circunferencia de centro  $C$ .

En resumen:

**Dos rectas concurrentes en  $O$  son cortadas por dos antiparalelas respecto de ellas en puntos inversos de una inversión de centro  $O$ .**

### 18. Determinación del inverso de un punto dado

Una inversión queda determinada por su centro  $O$  y su potencia de inversión  $K$ . Sin embargo, para resolver problemas de inversión o efectuar aplicaciones de la misma se puede partir también de otros datos, como se puede comprobar en el cálculo del inverso de un punto conocido en los siguientes casos:

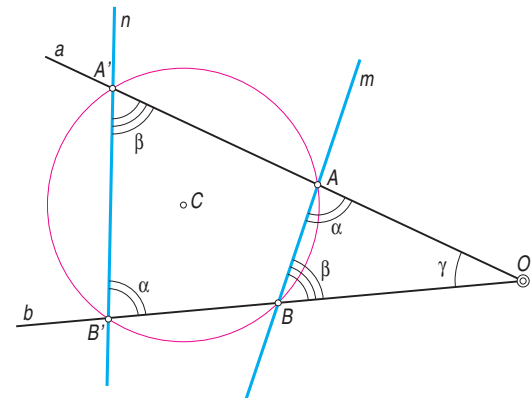


Fig. 48.

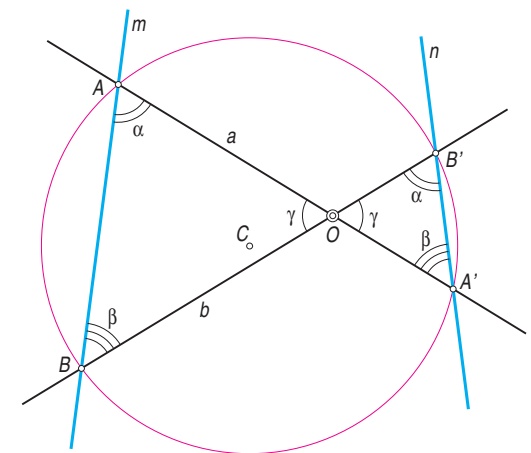


Fig. 49.

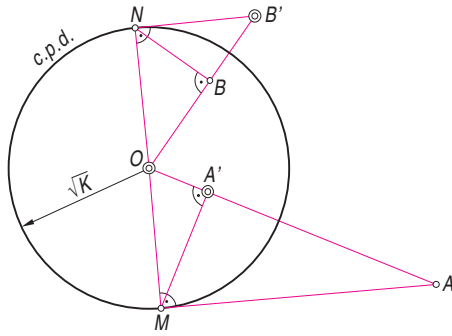


Fig. 50.

**1º. Conociendo la circunferencia de puntos dobles (c.p.d.) (Fig. 50)**

Sea  $A$  el punto dado, para calcular su inverso,  $A'$ , se traza desde  $A$  una de las tangentes a la *c.p.d.* y desde el punto de tangencia,  $M$ , se traza la perpendicular a la recta  $OA$ . El punto  $A'$  de corte de estas dos rectas es el inverso del punto  $A$  dado.

Esta construcción se justifica por el *teorema del cateto* cuyo enunciado dice: **en un triángulo rectángulo cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella**. Que aplicado al triángulo  $OMA$  se cumple:

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OM}{OA'}$$

que se transforma en:

$$OA \cdot OA' = OM^2 = K$$

lo que demuestra que  $A'$  es el inverso de  $A$  en una inversión de centro  $O$  y potencia  $K$ .

Si el punto dado es  $B$ , interior a la *c.p.d.*, se traza por  $B$  la perpendicular a la recta  $OB$  y por  $N$ , punto donde la citada perpendicular y la *c.p.d.* se cortan, se traza la tangente a esta. El punto  $B'$ , donde la tangente corta a la recta  $OB$ , es el inverso del punto  $B$  dado. En este caso el triángulo rectángulo es  $ONB'$ , el cateto  $ON = \sqrt{K}$ , la hipotenusa  $OB'$  y la proyección de aquél sobre esta  $OB$  (Fig. 50).

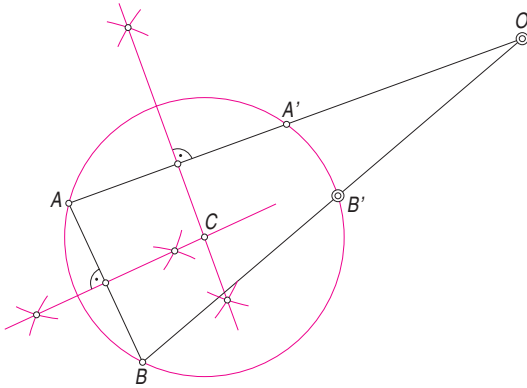


Fig. 51.

**2º. Conociendo el centro y una pareja de puntos inversos (Figs. 51 y 52)**

Partiendo de una de las deducciones hechas en el apartado 16 de este tema, en la que se decía que dos puntos cualesquiera y sus correspondientes inversos son concíclicos y sabiendo que tres puntos son suficientes para determinar una circunferencia, el problema se reduce a trazar la circunferencia que pasa por los puntos  $A$  y  $A'$ , pareja de puntos inversos conocidos, y por el punto dado  $B$ . El inverso de este,  $B'$ , es el punto donde la citada circunferencia corta a la recta  $OB$  (Fig. 51).

Existe otro procedimiento para resolver este problema basado en el antiparalelismo de la inversión que se aplica en la Fig. 52.

Se determina el ángulo,  $\beta$ , que forman las rectas  $OB$  y  $AB$  y se traza por  $A'$  la recta que forma con  $OA'$  el mismo ángulo  $\beta$ . El punto  $B'$  donde esta recta corta a la  $OB$  es el inverso de  $B$ .

De las dos rectas que pasan por  $A'$  y forman el ángulo  $\beta$  con  $OA'$ , la correcta es la que mantiene constante el valor de la potencia de inversión  $K$ . Es decir, se debe tener en cuenta que si  $OB > OA$ , entonces  $OB' < OA'$ .

En el caso de que la inversión fuera negativa se puede aplicar cualquiera de los procedimientos

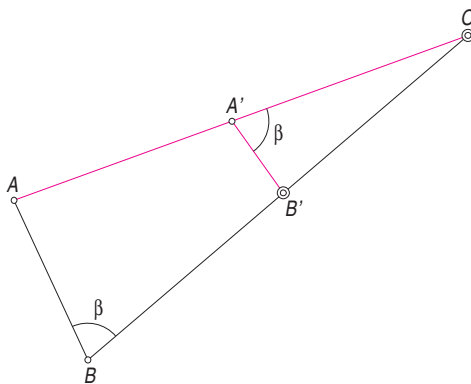


Fig. 52.

anteriores repitiendo, en cada caso, el mismo proceso seguido para la inversión positiva.

### 3°. Conociendo el centro y una circunferencia doble

En este caso se resuelve por conversión en uno de los anteriores, por lo cual, solo se explica en la Fig. 53, para la inversión positiva, y en la Fig. 54, para la negativa, la citada conversión.

Sea, en ambos casos,  $O$  el centro de inversión y la circunferencia de centro  $C$  figura doble de la misma.

Cualquier recta que pase por  $O$  y sea secante a la circunferencia corta a esta en una pareja de puntos inversos  $A$  y  $A'$ . Conociendo el centro  $O$  y esta pareja de puntos se puede calcular el inverso de otro punto  $B$  dado, por cualquiera de los procedimientos vistos en el caso anterior.

Si la inversión es positiva, a partir del centro de inversión  $O$  y de la circunferencia doble de centro  $C$  se puede calcular, además, la *c.p.d.* de modo que el problema se transforma en el primero de los casos resueltos (Fig. 55).

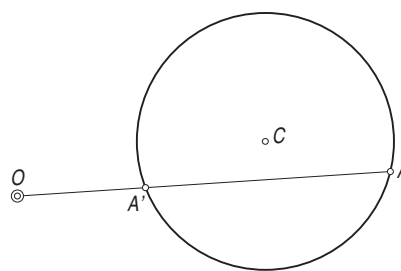


Fig. 53.

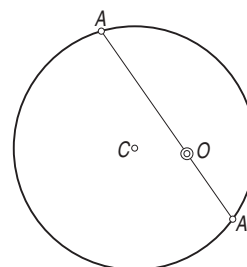


Fig. 54.

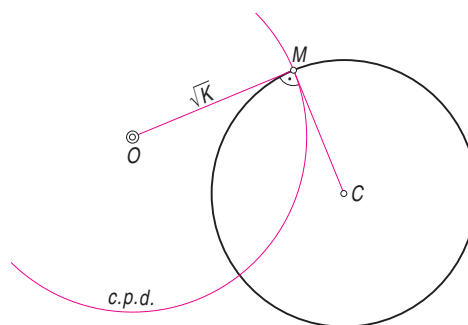


Fig. 55.

## 19. Figura inversa de una recta

Ya hemos visto que una recta que pasa por el centro de inversión es doble, por tanto, su inversa es ella misma (Fig. 56).

Veamos ahora cuál es la figura inversa de una recta que no pasa por el centro de inversión (Fig. 57).

Sea la inversión definida por la *c.p.d.* de centro  $O$  y la recta  $r$ , pasando, a continuación, a calcular los inversos de algunos puntos de ésta.

El primero de ellos  $A$ , pie de la perpendicular desde  $O$  a  $r$ , tiene como inverso  $A'$ . El inverso de  $P_\infty$ , punto del infinito de la recta  $r$ , es el centro de inversión  $O$ , ya que, si el producto de dos distancias es un valor real,  $K$  o  $-K$ , si una de ellas vale infinito la otra vale cero.

Para hallar el inverso de un punto  $B$  cualquiera de la recta se aplica el método de las antiparalelas, por lo que  $B'$  se encuentra en el pie de la perpendicular por  $A'$  a la recta  $OB$ .

Como para otro punto  $C$  de  $r$  se repetirá el proceso, se deduce que los inversos de los puntos de la recta  $r$  pertenecen a una circunferencia de diámetro  $\overline{OA'}$ .

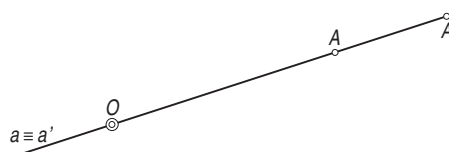


Fig. 56.

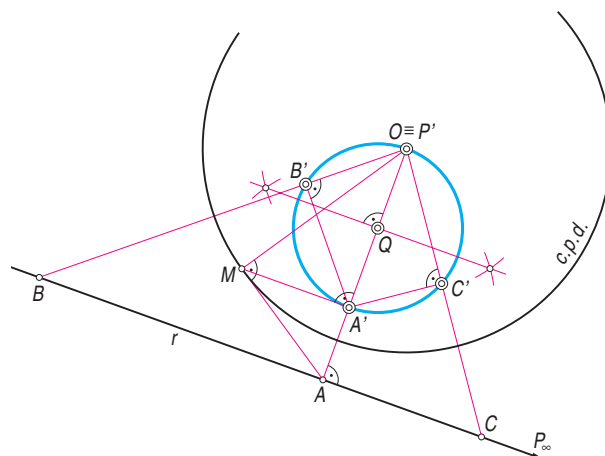


Fig. 57.



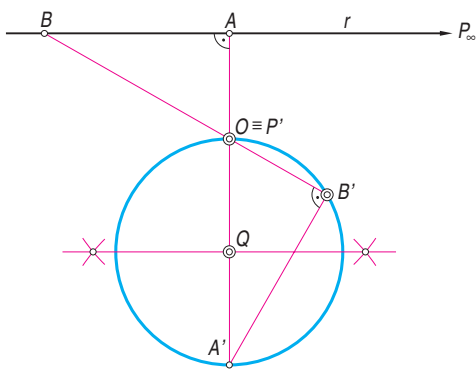


Fig. 58.

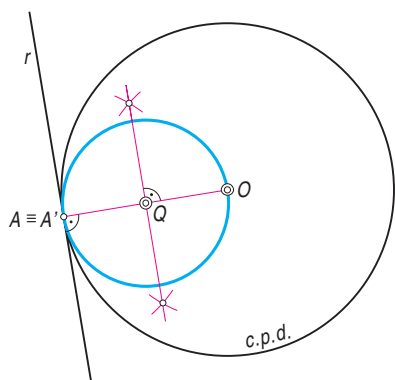


Fig. 59.

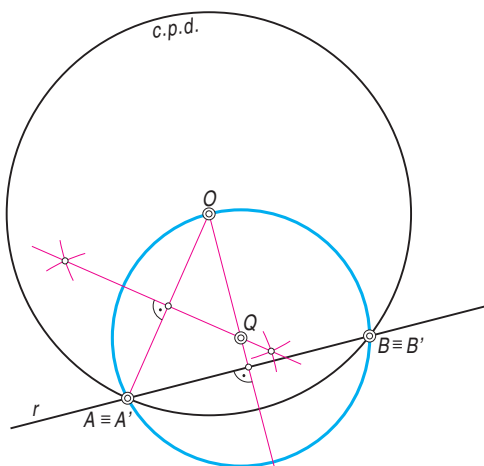


Fig. 60.

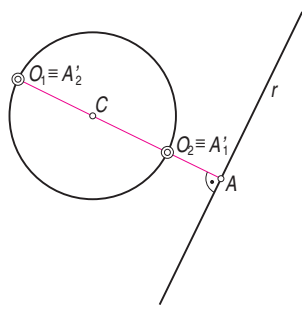


Fig. 61.

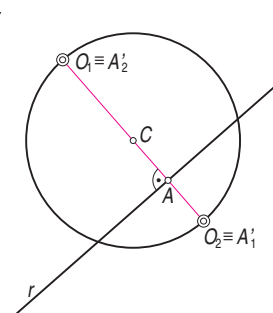


Fig. 62.

Si la inversión es negativa, definida por el centro  $O$  y la pareja de puntos  $A$  y  $A'$ , se llega a la misma conclusión, como puede apreciarse en la Fig. 58.

Como resumen de lo anterior se puede enunciar:

**La figura inversa de una recta que no pasa por el centro de inversión es una circunferencia que pasa por él, cuyo centro se halla en la perpendicular a la recta por el centro de inversión.**

Pero, al ser la inversión una transformación recíproca, es decir, si el inverso del punto  $A$  es  $A'$ , el inverso de  $A'$  es  $A$ , también se puede formular el enunciado recíproco del anterior:

**La figura inversa de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta que no pasa por él y es perpendicular a la recta que determinan el centro de inversión y el de la circunferencia.**

En el cálculo de la figura inversa de una recta que no pasa por el centro de inversión, cuando la inversión es positiva se pueden dar, además, dos casos particulares:

**1º. La recta es tangente a la c.p.d. (Fig. 59)**

El punto de tangencia es punto doble  $A \equiv A'$ , por lo que este y el centro de inversión  $O$  son los extremos del diámetro de la circunferencia inversa de la recta  $r$ .

**2º. La recta es secante a la c.p.d. (Fig. 60)**

Los puntos de intersección de la recta  $r$  y de la c.p.d.,  $A \equiv A'$  y  $B \equiv B'$  son dobles, lo que significa que pertenecen tanto a  $r$  como a la circunferencia de centro  $Q$  inversa a ella. En consecuencia, el problema se reduce a trazar la circunferencia que pasa por tres puntos:  $O$ ,  $A \equiv A'$  y  $B \equiv B'$ .

De todo lo expuesto en este apartado se deduce que **una circunferencia y una recta exterior a ella pueden considerarse inversa una de otra en una inversión positiva y otra negativa cuyos centros de inversión son los extremos del diámetro de la circunferencia perpendicular a la recta.**

Sea la circunferencia de centro  $C$  y la recta  $r$  de la Fig. 61. Ambas son inversas en la inversión positiva de centro  $O_1$ , en la que el inverso del punto  $A$  de la recta es  $A'_1$ . Pero también se corresponden en una inversión negativa de centro  $O_2$ , en la que el inverso del punto  $A$  es  $A'_2$ .

Si la circunferencia y la recta son secantes, las dos inversiones de centros  $O_1$  y  $O_2$  que las relacionan son positivas (Fig. 62).

En el caso de que la recta y circunferencia sean tangentes, solo hay una inversión, positiva, que las hace corresponder, en la que el punto de tangencia de ambas es doble, punto  $A \equiv A'$  (Fig. 63).

## 20. Figura inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión

En la inversión definida por la c.p.d. de centro  $O$  de la Fig. 64, los puntos inversos de  $A$  y  $B$ , extremos del diámetro de la circunferencia dada de centro  $C$ , contenidos en la recta  $OC$ , son, respectivamente,  $A'$  y  $B'$ , luego debe cumplirse:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = K$$

siendo  $K$  la potencia de inversión.

Por otra parte, la potencia del punto  $O$  respecto de la circunferencia de centro  $C$ , que llamaremos  $P$ , podrá expresarse:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = P$$

Si se divide la expresión anterior por esta se obtiene:

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA}} = \frac{K}{P}$$

Teniendo en cuenta que el cociente de dos constantes,  $K$  y  $P$ , sigue siendo otra constante, esta última expresión es la de una homotecia de centro  $O$  y razón  $K/P$ , en la que el punto homotético de  $A$  es  $B'$  y el de  $B$  es  $A'$ . Por lo que, aplicando la propiedad de que dos figuras homotéticas son semejantes, se puede afirmar:

**La figura inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de inversión es otra circunferencia que tampoco pasa por él y es, además de inversa, homotética de la anterior en una homotecia cuyo centro es el de la inversión y cuya razón de homotecia es  $K/P$  (cociente entre la potencia de inversión y la potencia del centro de inversión respecto de la circunferencia inicial).**

Por todo lo anterior, las circunferencias de centros  $C$  y  $Q$  de la Fig. 64 son inversas y a la vez homotéticas, siendo el punto  $O$  centro de ambas transformaciones. Pero, así como los inversos de los puntos  $A$  y  $B$  son, respectivamente,  $A'$  y  $B'$ , el homotético de  $A$  es  $B'$  y el de  $B$  es  $A'$ . Esta es la razón por la que a una pareja de puntos inversos se les llama también antihomotéticos.

Como consecuencia de esto último, los centros  $C$  y  $Q$  de las dos circunferencias son homotéticos pero no son inversos, por lo que, para no confundir, al centro de la circunferencia inversa de la de centro  $C$  no conviene llamarle  $C'$ .

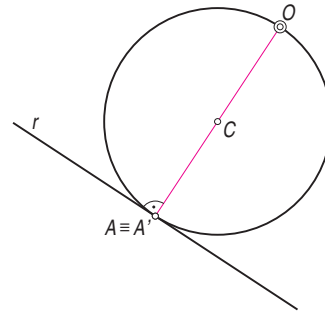


Fig. 63.

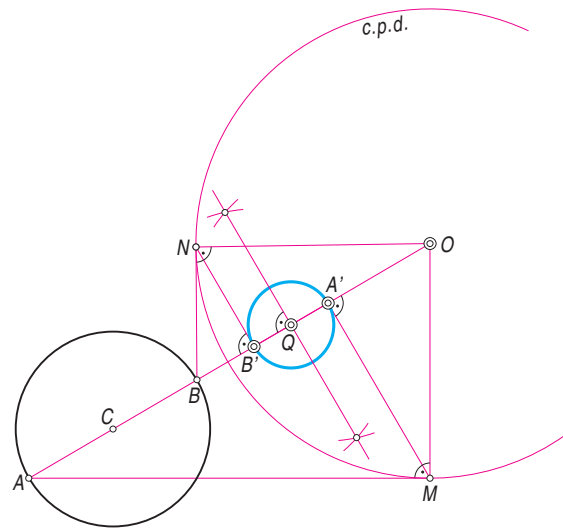


Fig. 64.

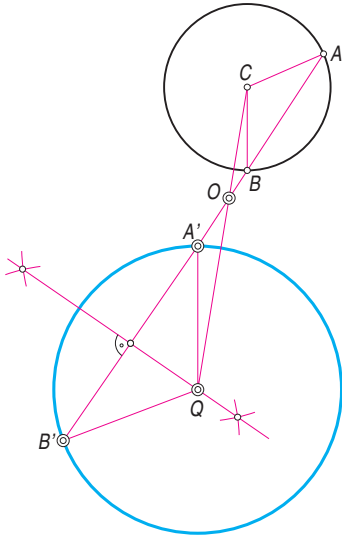


Fig. 65.

Cuando la inversión es negativa, como en la Fig. 65, puede seguirse el mismo razonamiento y llegar a la misma conclusión que en el caso de la inversión positiva.

Para determinar la circunferencia inversa de otra dada en una inversión definida por el centro y una pareja de puntos inversos, tanto si la inversión es positiva, Fig. 66, como si es negativa, Fig. 67, se puede aprovechar la demostrada relación de homotecia entre ellas.

Sea, en ambos casos, la inversión de centro  $O$ , la pareja de puntos inversos  $A$  y  $A'$  y la circunferencia de centro  $C$ , de la que se trata de calcular su inversa.

La recta  $OA$  corta, además, a esta circunferencia en el punto  $B$ , que será, como hemos visto, además de inverso de  $B'$ , el homotético de  $A'$ .

De esto se deduce que el centro,  $Q$ , de la circunferencia inversa de la dada se halla en el punto donde la recta  $OC$  corta a la paralela por  $A'$  a  $BC$

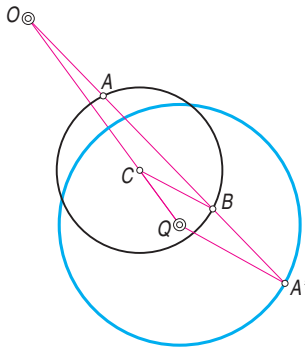


Fig. 66.

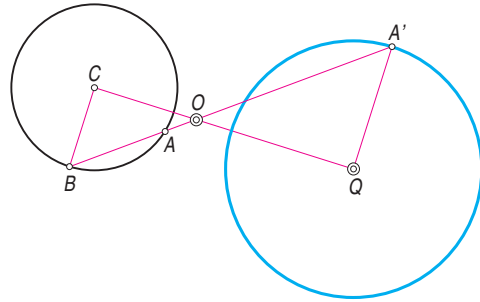


Fig. 67.

### ACTIVIDADES

1. Dada la pareja de segmentos homólogos  $AB$  y  $A'B'$  y el punto doble  $P \equiv P'$ , hallar el homólogo del punto  $C$  (Fig. 68).

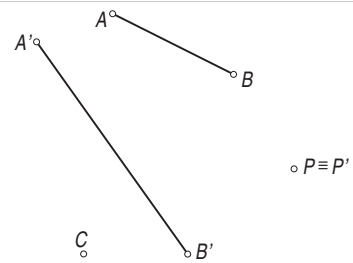


Fig. 68.

2. De una homología se conoce el centro,  $O$ , el eje,  $e$ , y la pareja de puntos  $A-A'$ . Determinar el homólogo del punto  $B$  (Fig. 69).

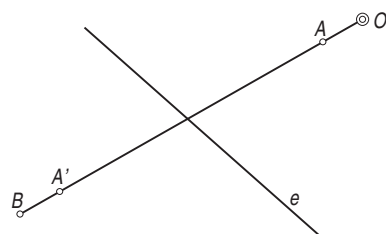


Fig. 69.

3. En la homología definida por el centro,  $O$ , el eje  $e$ , y la recta límite  $l$ , hallar la figura homológica del triángulo  $ABC$  (Fig. 70).

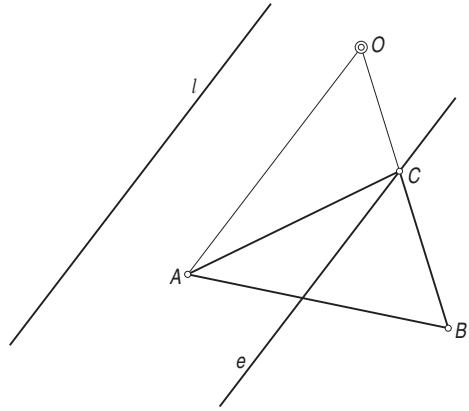


Fig. 70.

4. Hallar la figura homológica del paralelogramo  $ABCD$  conociendo el centro,  $O$ , el eje,  $e$ , y la recta límite  $m'$  (Fig. 71).

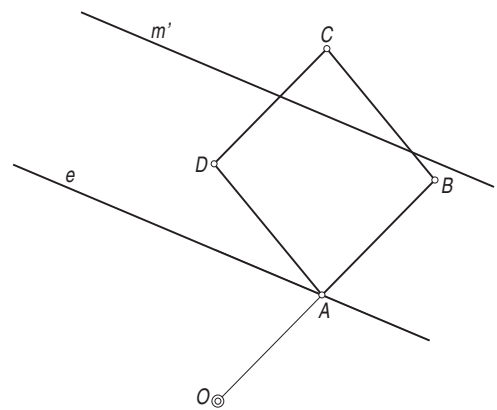


Fig. 71.

5. De una homología se conocen las rectas  $r \equiv r'$ ,  $s$  y  $s'$  y el par de puntos  $P$  y  $P'$ . Calcular el centro, el eje y las rectas límites. Comprobar que se cumplen las propiedades de estas (Fig. 72).

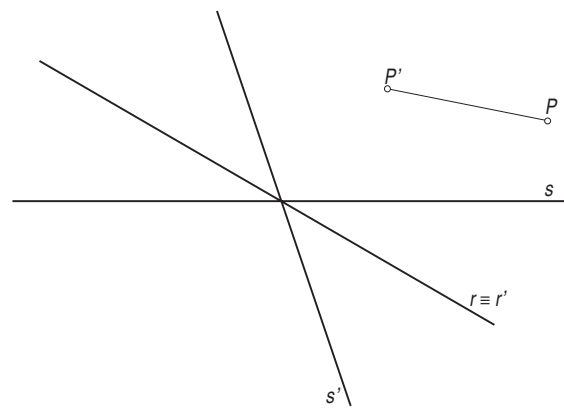


Fig. 72.

6. Hallar la figura afín del rectángulo  $ABCD$  conociendo el eje,  $e$ , y el punto  $A'$  afín del vértice  $A$  (Fig. 73).

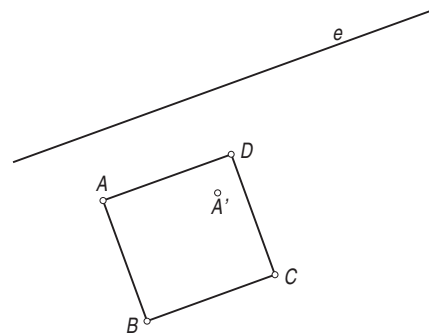


Fig. 73.

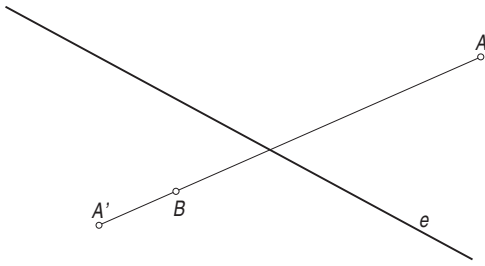


Fig. 74.

7. Calcular el punto afín de  $B$  conociendo el eje de afinidad,  $e$ , y la pareja de puntos  $A-A'$  (Fig. 74).

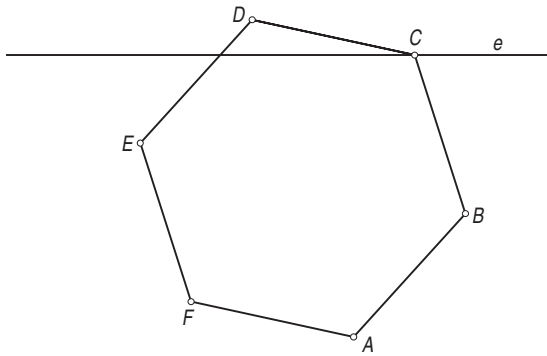


Fig. 75.

8. En una afinidad ortogonal de eje  $e$  y razón:

$$K = \frac{\overline{A'L}}{\overline{AL}} = -\frac{3}{4}$$

dibujar la figura afín del hexágono regular  $ABCDEF$  (Fig. 75).

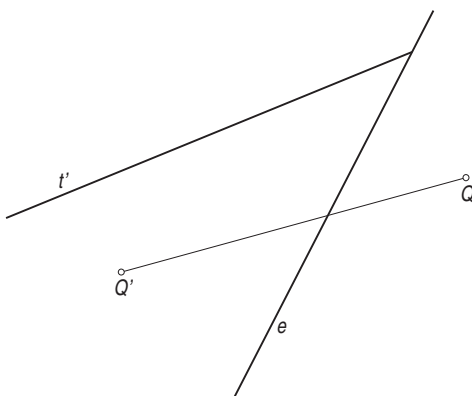


Fig. 76.

9. Los puntos  $Q$  y  $Q'$  son, respectivamente, los centros de una circunferencia y una elipse afines entre sí en una afinidad de eje  $e$ . Siendo  $t'$  una tangente a la elipse, calcular los ejes de esta (Fig. 76).

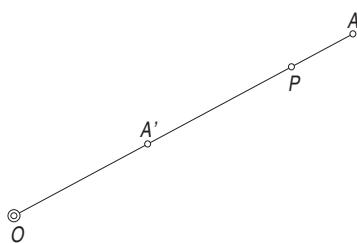


Fig. 77.

10. Calcular el inverso del punto  $P$  en una inversión de la que se conoce el centro,  $O$ , y la pareja de puntos inversos  $A-A'$  (Fig. 77).

11. Dibujar la *c.p.d.* de la inversión que transforma la recta  $r$  en la circunferencia de centro  $C$  (Fig. 78).

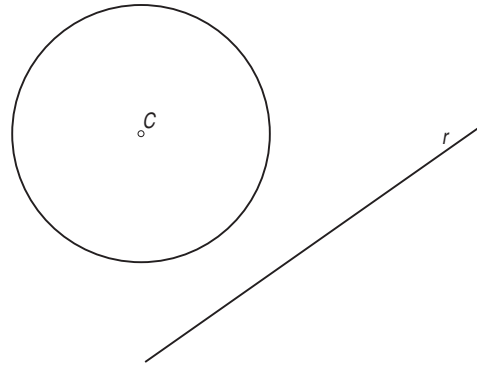


Fig. 78.

12. Hallar el inverso del punto  $P$  en una inversión negativa que transforma la circunferencia de centro  $C_1$  en la de centro  $C_2$  (Fig. 79).

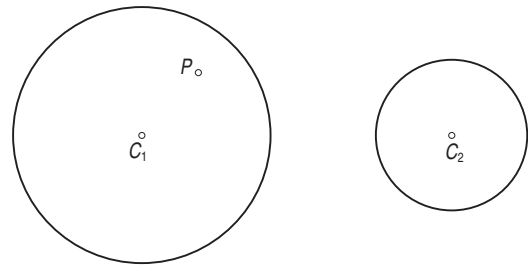


Fig. 79.

13. En la inversión definida por el centro,  $O$ , y la pareja de puntos inversos  $A-A'$ , dibujar la figura inversa de la circunferencia de centro  $C$  (Fig. 80).

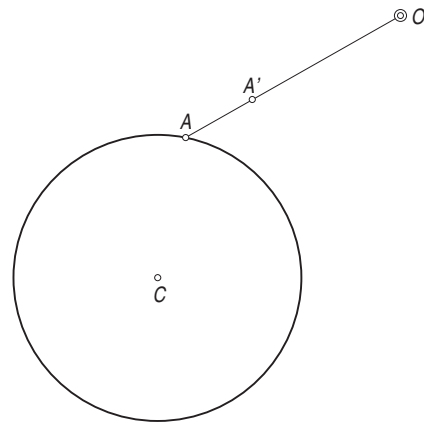


Fig. 80.

14. Sabiendo que los puntos  $P$  y  $P'$  son inversos, hallar la recta que pasa por  $P$  y es inversa a la circunferencia de centro  $C$  (Fig. 81).

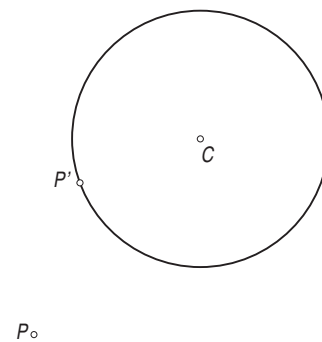


Fig. 81.

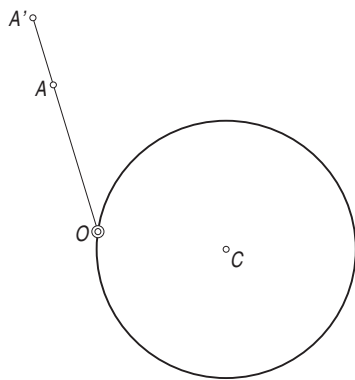


Fig. 82.

15. Hallar la figura inversa de la circunferencia de centro  $C$  conociendo el centro de inversión,  $O$ , y la pareja de puntos inversos  $A-A'$  (Fig. 82).

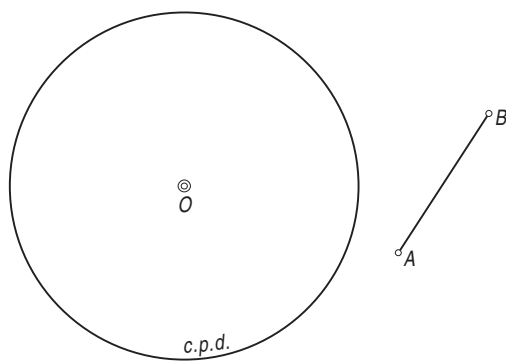


Fig. 83.

16. Determinar la figura inversa del segmento  $AB$  en una inversión de la que se conoce la  $c.p.d.$  (Fig. 83).