

SISTEMA DE PERSPECTIVA CABALLERA

TEMA 15

Objetivos y orientaciones metodológicas

Todo lo indicado para la unidad temática anterior es aplicable a ésta. El alumno debe comprender el tipo de proyección que emplea este sistema y fijar o elegir los dos datos que definen el sistema. Una vez representados el punto, la recta y el plano, fijará especialmente su atención en la representación de una circunferencia situada en planos paralelos a los del sistema con vistas a la obtención de la perspectiva caballera de un cuerpo.

Finalmente representará cuerpos geométricos en posiciones sencillas. Las actividades se harán, unas con instrumentos y otras a mano alzada.

El desarrollo de esta unidad temática puede hacerse a lo largo de cuatro clases.

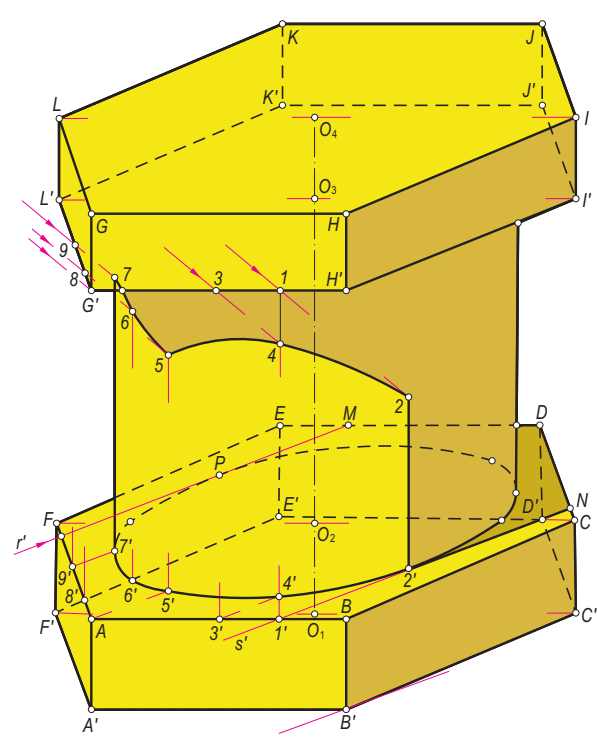


Fig. 1. Ejemplo de pieza en perspectiva caballera con sombras.

1. Fundamentos del sistema de perspectiva Caballera

En este tema vamos a dar los fundamentos de este sencillo, bonito y útil sistema que se llama *sistema de perspectiva caballera* o *perspectiva rápida*. Tenemos un plano llamado *plano del cuadro*, *plano del papel*, *plano del dibujo* o *plano de proyección*; tenemos también un triedro trirectángulo.

En la **Fig. 2** se dibuja el triedro trirectángulo $O(X)(Y)(Z)$; los ejes del sistema son las aristas X , Y y Z del triedro. Suponemos que el plano del cuadro es el mismo ZOX del triedro; según esto, los ejes (X) y (Z) del espacio coinciden con sus proyecciones X y Z , respectivamente. El eje (Y) es perpendicular al plano del cuadro y los planos XOY y ZOY son proyectantes sobre el cuadro.

Si proyectáramos ortogonalmente un cuerpo sobre estos planos, tendríamos unas proyecciones llamadas *previas* y éstas, proyectadas a su vez ortogonalmente sobre el cuadro, estarían confundidas siempre con los ejes X y Z . Para evitar esto elegimos una dirección de proyección oblicua al cuadro y de esta forma el eje (Y) , en vez de proyectarse confundido con el origen O , se proyecta según una recta Y que pasa por el origen.

En la **Fig. 2** hemos elegido un punto (1) del eje (Y) en el espacio y lo hemos proyectado según una dirección $-d-$ cualquiera, siendo el punto 1 su proyección y la recta $O-1$ será el eje Y ya proyectado.

Observe el lector que la dirección elegida forma un ángulo σ con el cuadro y que además hemos de fijar el ángulo φ , que forma con el plano $(Y)O(X)$ el plano proyectante de la citada dirección. Visto esto, los ejes

del sistema, proyectados ya sobre el plano del cuadro, quedan según se ve en la parte derecha de la figura; los ejes Z y X son perpendiculares y el eje Y forma el ángulo φ con el eje X .

Pasemos ahora a la **Fig. 3**. El punto (1) del eje (Y) se proyecta en 1 sobre el cuadro; el triángulo $(1)-O-1$ es rectángulo en O ; si suponemos abatido este triángulo sobre el cuadro, tomando como charnela la recta $O-Y$, tenemos el triángulo 1_0-O-1 y, por lo tanto, el ángulo 1_0-1-O es el ángulo σ en verdadera magnitud que forma la dirección de proyección con el cuadro. La recta 1_0-O es el eje (Y) abatido, por lo que lo designamos por Y_0 .

También podemos imaginar abatido el plano $XO(Y)$ del espacio sobre el cuadro, tomando como charnela el eje X ; como el ángulo $(Y)-O-X$ es recto, el eje (Y) abatido vendrá ahora sobre la recta $O(1_1)_0$, siendo $(1_1)_0$ el punto abatido del (1) ; piense el lector que la figura es una perspectiva convencional y que se ha de verificar $(1)-O = (1_1)_0-O = 1_0-O$.

Hemos, pues, relacionado con estos dos abatimientos el punto (1) del espacio en el (Y) con su proyección $-1-$ sobre el cuadro y con su abatimiento $(1_1)_0$ sobre dicho plano. En esta figura queda, pues, ya fijada una dirección que es $1-(1_1)_0$.

Volvamos ahora al triedro trirectángulo $OX(Y)Z$ representado en la **Fig. 4**. Sea el punto (B) del espacio el que vamos a representar en perspectiva caballera.

La proyección ortogonal de (B) sobre $XO(Y)$ es el punto (E) ; igualmente, sobre ZOX se proyecta en (A) y sobre $ZO(Y)$ en (C) . Los puntos (A) , (C) y (E) se llaman *proyecciones previas* del punto (B) sobre los planos del triedro. Elegimos ahora una dirección oblicua al plano

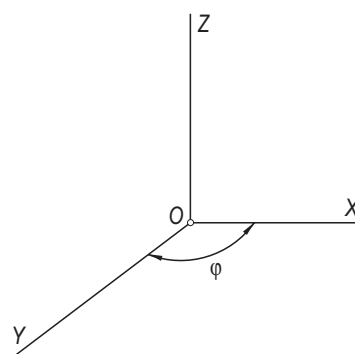
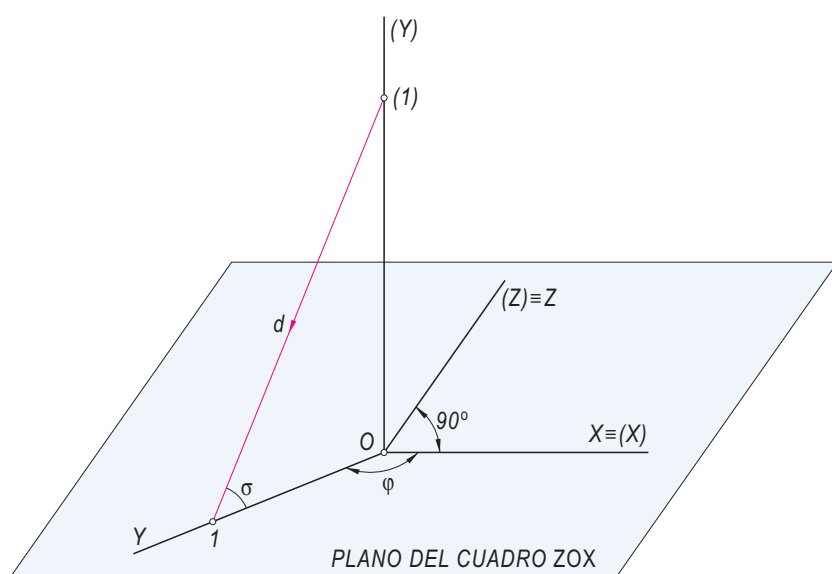


Fig. 2.

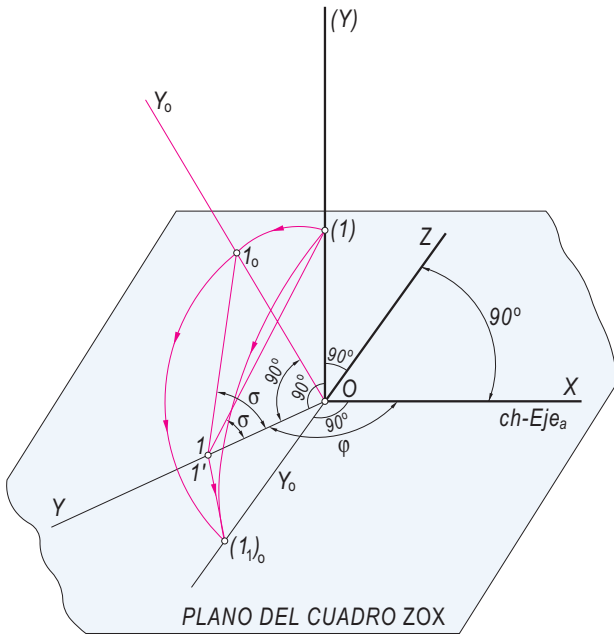


Fig. 3.

del cuadro y proyectamos sobre él el conjunto formado por el punto (B) y sus proyecciones previas (A), (C) y (E).

El punto (B) se proyecta en B; este punto B se llama proyección directa oblicua del punto (B) sobre el cuadro y es lo que en realidad se llama *perspectiva caballera del punto*.

El punto (C) se proyecta en C; el (A) ya está proyectado, por lo que su proyección A coincide con (A); el punto (E) lo hace en E. Observe el lector que los puntos A, C y E son proyecciones de las proyecciones previas (A), (C) y (E).

El paralelepípedo formado en el espacio por los ejes Z, (Y) y X y por las líneas (B)-(A), (B)-(C) y (B)-(E) queda representado en perspectiva con trazo más grueso. En la figura se indica el ángulo σ que forma la dirección *-d-* de proyección con el cuadro y el ángulo φ que forma el eje X con el eje Y proyectado.

El punto A es proyección directa ortogonal del punto (B) del espacio sobre el cuadro ZOX y se llama *proyección segunda* o *proyección vertical primera* del punto (B).

El punto C es proyección oblicua sobre el cuadro de la proyección (C) del punto (B) sobre el plano ZO(Y) y se llama *proyección tercera* o *proyección vertical segunda*.

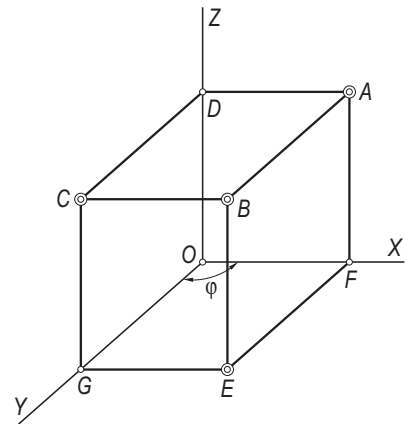
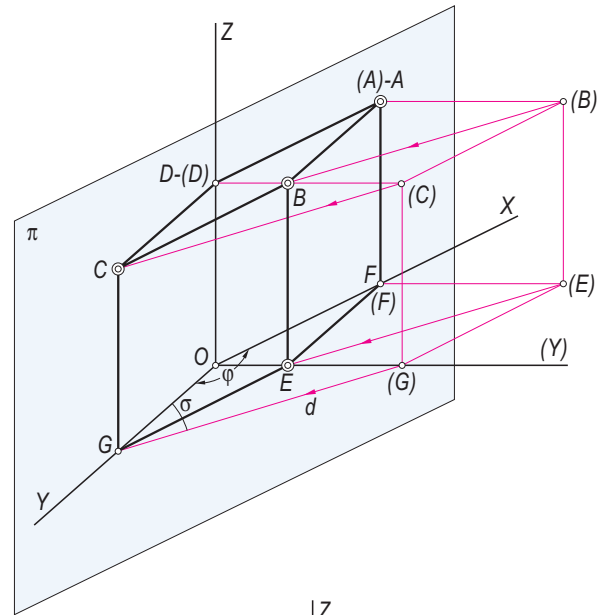


Fig. 4.

El punto E es la proyección oblicua de la proyección previa ortogonal (E) del punto (B) sobre el plano XOY.

En la parte inferior de la figura se representa el plano del cuadro tal y como queda después de proyectado el conjunto anterior. El punto B es la proyección o perspectiva directa y los puntos E, A y C son las proyecciones de las proyecciones previas sobre los planos XOY, ZOY y ZOY, respectivamente. Obsérvese el paralelepípedo que se visualiza con trazo fino al unir los puntos anteriores y fíjese el lector en la posición de todas las aristas de este paralelepípedo con relación a los planos del triedro.

Resumiendo, el sistema de perspectiva caballera emplea la proyección cilíndrica oblicua y un punto tiene cuatro proyecciones: una directa oblicua sobre el cuadro y tres proyecciones oblicuas de las proyecciones ortogonales sobre los planos del triedro. Piénsese que la proyección sobre el cuadro ZOX, por estar (A) y A confundidas, resulta una proyección ortogonal.

2. Notaciones

En el sistema de perspectiva caballera se emplean las notaciones siguientes.

Un punto se designa por una letra mayúscula o por un número; por ejemplo: $P-P'-P''-P'''$ designa un punto cuya proyección directa oblicua es P ; P' es la proyección sobre el plano XOY ; P'' es la proyección directa ortogonal sobre el cuadro ZOX y P''' es la proyección sobre ZOY ; igualmente, un punto se puede nombrar por $1-1'-1''-1'''$.

De la misma forma y en el mismo orden de significación se nombra una recta empleando letras minúsculas, por ejemplo, $r-r'-r''-r'''$.

El plano se nombra por una letra griega; así, el plano φ se designa por $\varphi(\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3)$, siendo $\varphi_1-\varphi_2$ y φ_3 las trazas de dicho plano con los planos XOY , ZOX y ZOY , respectivamente.

3. Datos del sistema. Valores de σ y de φ

Para que un sistema de perspectiva caballera quede definido es preciso conocer dos datos:

- 1º. **El valor del ángulo φ** que forma en el espacio el plano XOY con el plano proyectante del eje (Y) que contiene la dirección de proyección; dicho de forma más sencilla, **φ es el ángulo que ya en proyección forman los ejes X e Y .**
- 2º. **El valor del ángulo σ** que forma la dirección $-d-$ de proyección con el plano del cuadro.

Con estos dos datos el sistema está perfectamente definido y podemos comenzar a operar en él. Según esto, la práctica de la perspectiva caballera lleva implícita la elección del sistema, fijando los valores de los ángulos φ y σ .

El ángulo φ que forman los ejes X e Y puede tener unas series de valores, eligiendo uno, de acuerdo con el resultado que se desee obtener.

En la **Fig. 5** se señalan diez valores diferentes para el ángulo φ , en los que se indica el ángulo que forma el eje Y con el eje X o con el eje Z . Obsérvese cada posición detenidamente y la proyección, o perspectiva, de un cubo en cada caso. El ángulo φ se debe elegir entre los valores indicados en esta figura para facilitar el trazado de la perspectiva. En cada caso se observa el cubo representado con unas caras determinadas vistas y además con mayor o menor deformación.

Dentro de cada uno de estos diez valores del ángulo φ , podemos elegir varios valores para el ángulo σ , según vemos a continuación.

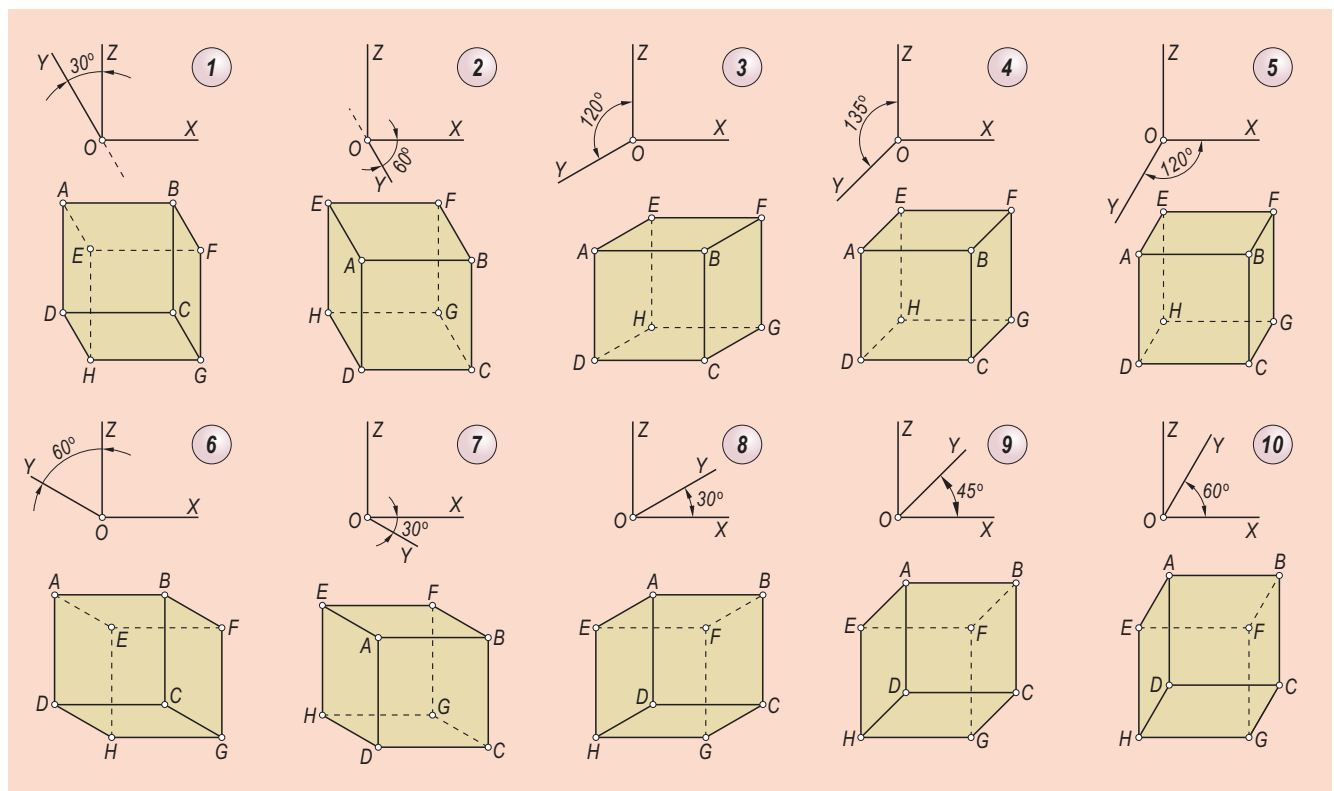


Fig. 5.

4. Coeficiente de reducción

En este sistema, y tal como hemos definido la forma de proyectar los elementos del espacio, las rectas paralelas al plano del cuadro, es decir, al plano ZOX , se proyectan tal y como son, en verdadera magnitud, sin deformación alguna. Lo mismo ocurre si son paralelas al eje X o al eje Z , pues serán paralelas al cuadro.

Veamos qué ocurre con las rectas paralelas al eje (Y) en el espacio, es decir, con las perpendiculares al cuadro.

En la **Fig. 2** tomamos un segmento $O-(1)$ del eje (Y) y, proyectado sobre el cuadro, tenemos el segmento $O-1$; este segmento $O-1$ será mayor o menor que el segmento $O-(1)$ del espacio según que el ángulo σ sea menor o mayor que 45° , respectivamente.

Se llama coeficiente de reducción del sistema, y se representa por la letra μ , el valor de la cotangente trigonométrica del ángulo σ que forma la dirección de proyección $-d-$ con el plano del cuadro, es decir, $\mu = \cotg \sigma$.

En el triángulo rectángulo $(1)-O-1$, el valor de la cotangente σ es la razón entre el cateto contiguo y el cateto opuesto; por ello, $\cotg \sigma = O-1/O-(1)$. De esto deducimos que **el coeficiente de reducción es un número que indica la razón entre el segmento ya proyectado y el segmento real del espacio**.

Si σ vale 45° , $O-(1) = O-1$ y, por lo tanto, no habría reducción, pues $\mu = \cotg 45^\circ = 1$; el segmento paralelo al eje Y se proyectaría sin deformación.

Si $\sigma < 45^\circ$, $O-(1) < O-1$ y el segmento real se proyectaría ampliado, con lo que obtendríamos una perspectiva irreal o muy deformada; ahora no sería coeficiente de reducción, sino de ampliación, pues la cotangente de un ángulo menor de 45° es mayor que 1. No debe, pues, el lector tomar valores de σ menores de 45° e incluso desechar el valor de 45° , pues también resultan perspectivas deformadas.

Si $\sigma > 45^\circ$, $O-(1) > O-1$ y toda recta paralela al eje Y se proyecta deformada según el valor de $\mu = \cotg \sigma$.

El valor más razonable es $\sigma = 60^\circ$, siendo $\mu = \cotg 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

No obstante, como valores más aconsejables para el coeficiente de reducción se deben emplear 0,5, 0,6 y 0,7, con los que se obtienen perspectivas muy agradables a la vista. Piénsese que el efecto de deformación de la perspectiva aumenta con el coeficiente de reducción.

Resumiendo, las rectas paralelas a los ejes X y Z se proyectan en verdadera magnitud y las rectas paralelas al eje Y se proyectan reducidas según el valor del coeficiente de reducción del sistema.

La Norma UNE 1031 indica que el valor normalizado es $\varphi = 45^\circ$ y el coeficiente de reducción debe ser $\mu = 0,5$. No obstante, el lector puede elegir otros valores.

5. Representación del punto (Fig. 6)

Hemos visto que el punto tiene cuatro proyecciones. Supongamos un punto (P) del espacio que tiene de coordenadas $P(x, y, z)$. Vamos a representar este punto en un sistema definido, siendo X, Y y Z los ejes y σ el ángulo de reducción; por el punto O , origen, trazamos la perpendicular al eje Y , y a partir de un punto 1 cualquiera de dicho eje, construimos el ángulo σ , con lo cual tenemos el triángulo 1_0-O-1 , que nos permitirá reducir las medidas sobre el eje Y .

Tomamos sobre el eje X la coordenada $\overline{ON} = x$ en verdadera magnitud, es decir, sin reducir; sobre OZ , tomamos la coordenada $\overline{OM} = z$; la coordenada $-y-$ hay que reducirla y para ello se toma sobre $O-1_0$ el segmento $\overline{O-L_0} = y$, y por L_0 trazamos la paralela a 1_0-1 , con lo cual tenemos el punto L en el eje Y . Las proyecciones P', P'' y P''' se obtienen a partir de los puntos N, M y L por medio de paralelas a los ejes. La proyección directa P se obtiene completando el paralelepípedo a partir de P', P'' y P''' .

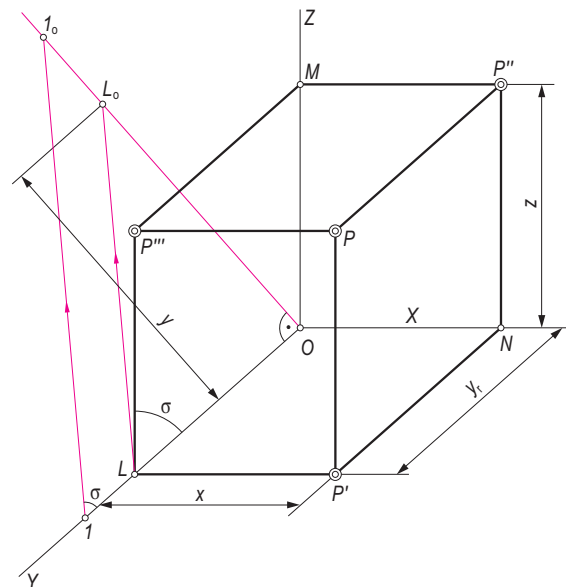


Fig. 6.

6. Paso de un punto del sistema diédrico a perspectiva caballera (Fig. 7)

Supongamos un punto $P'-P''$ representado en el sistema diédrico y referido a un plano de perfil ZY de forma que sus coordenadas en el espacio son: $x = \overline{ON}$, $y = \overline{NP'}$ y $z = \overline{NP''}$. Para representar este punto en caballera se toman la coordenada x y la z en verdadera magnitud y la coordenada $-y$ se reduce sobre la recta Y_0 , abatiendo el eje Y ; en la figura, dado el ángulo σ , se coloca $y = \overline{OB_0}$ y por B_0 trazamos la paralela a la dirección $-d$, con lo cual tenemos el punto B ; con las coordenadas \overline{ON} , \overline{OB} y \overline{OM} se completa el paralelepípedo, y obtenemos las proyecciones $P-P'-P''-P'''$ del punto.

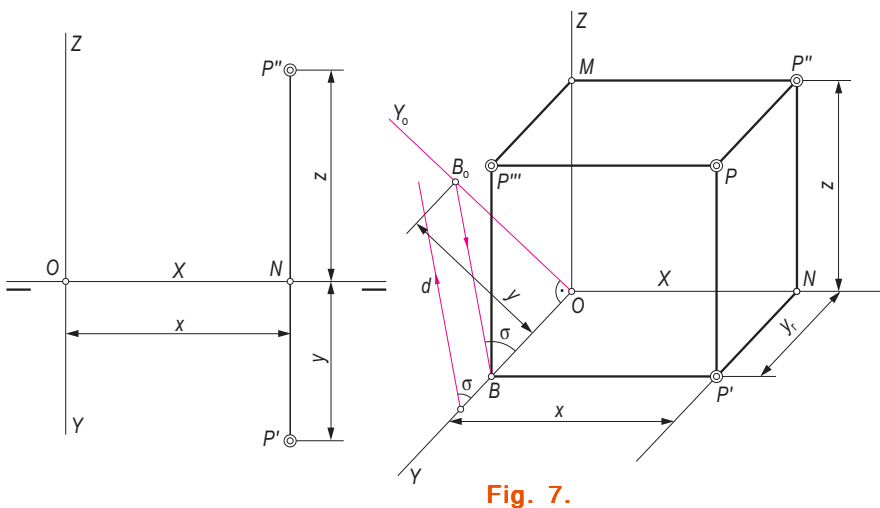


Fig. 7.

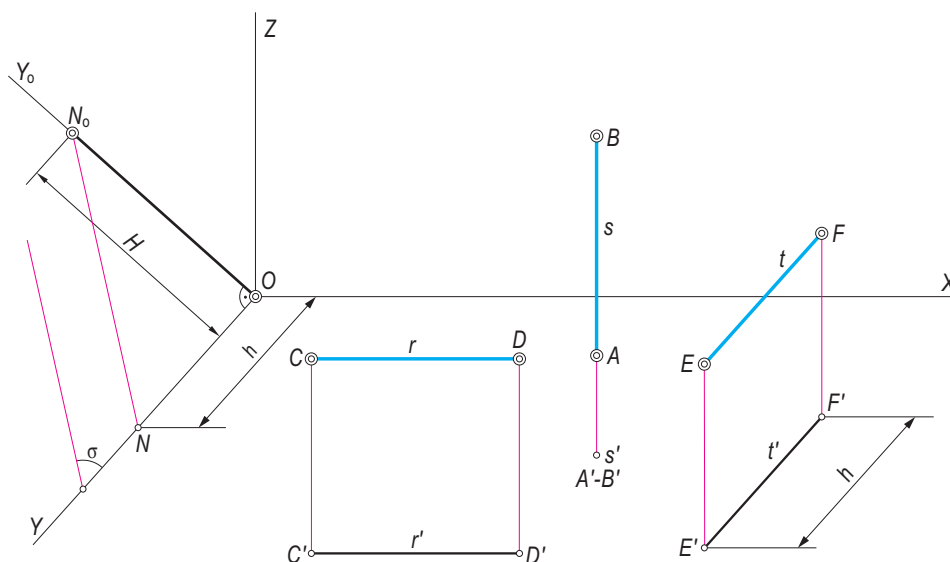


Fig. 8.

7. Distancia entre dos puntos

Fig. 8. Primer caso. El segmento \overline{AB} en caballera, por ser paralelo al eje Z , está ya en verdadera magnitud. El segmento \overline{CD} , por ser paralelo al eje X , también está ya en verdadera magnitud. El segmento \overline{EF} , por ser paralelo al eje Y , está reducido; basta llevarlo según $O-N$ en el eje Y y obtener $O-N_0$, que es la verdadera magnitud H del citado segmento \overline{EF} .

Fig. 9. Segundo caso. La distancia real entre los puntos N y B , por estar el segmento NB en el plano XOY , es el segmento N_0-B_0 ; para ello se abaten los puntos N y B en N_0 y B_0 , trazando las paralelas que indican las flechas a los lados del triángulo $A-O-(A)_0$.

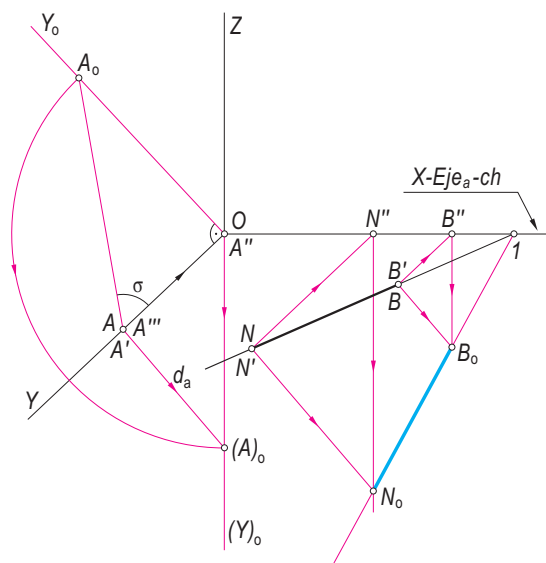


Fig. 9.

Fig. 10. Es el mismo problema que el anterior; hay que hallar la distancia entre C y D , que será la hipotenusa del triángulo CND ; la verdadera magnitud de CN es $C'''-D'''_0$, y con ésta y el segmento \overline{ND} como catetos se construye la hipotenusa del triángulo rectángulo que es la verdadera distancia entre los puntos C y D .

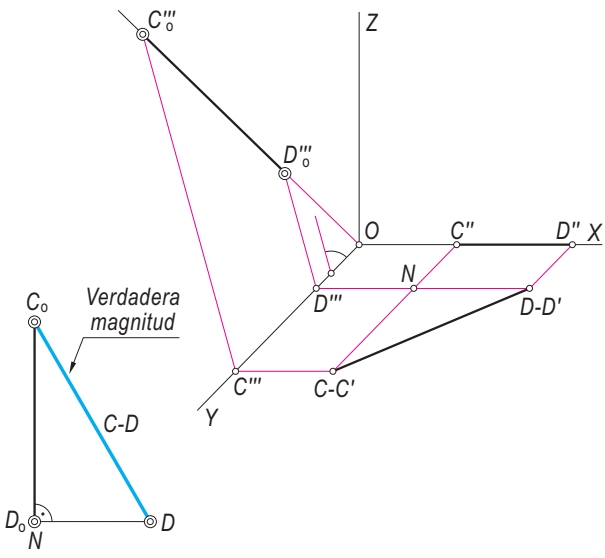


Fig. 10.

Fig. 11. La verdadera magnitud del segmento $\overline{A-B}$ del plano ZOX es él mismo.

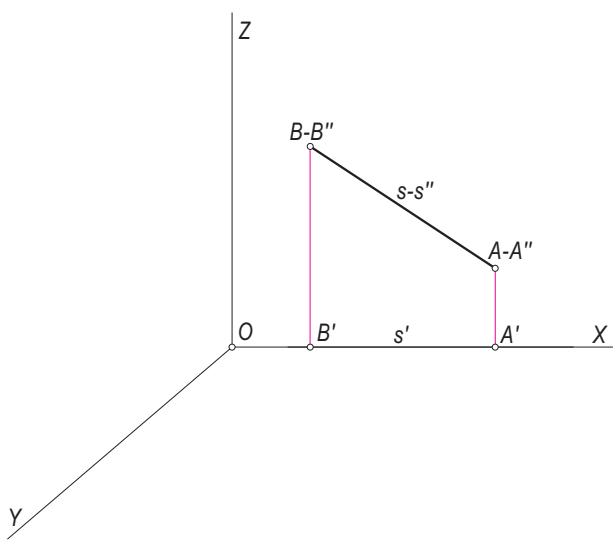


Fig. 11.

8. Distancia entre dos puntos cuando la recta que los une es oblicua a los planos del sistema (Fig. 12)

Supongamos dos puntos $P-P'$ y $Q-Q'$ tales que el segmento que definen es oblicuo a los planos del sistema. La distancia que separa estos puntos es, en proyección, el segmento $d-d'$. La verdadera magnitud D es la hipotenusa del triángulo PNQ del espacio, en el cual el cateto $\overline{PN} = h$ es la diferencia de cotas entre los puntos P y Q y está en verdadera magnitud; el otro cateto \overline{NQ} es igual a $d' = \overline{P'Q'}$; hallamos la verdadera magnitud de d' , que es d'_0 , como hemos visto en la Fig. 9, y obtenemos el segmento $\overline{TQ'}$.

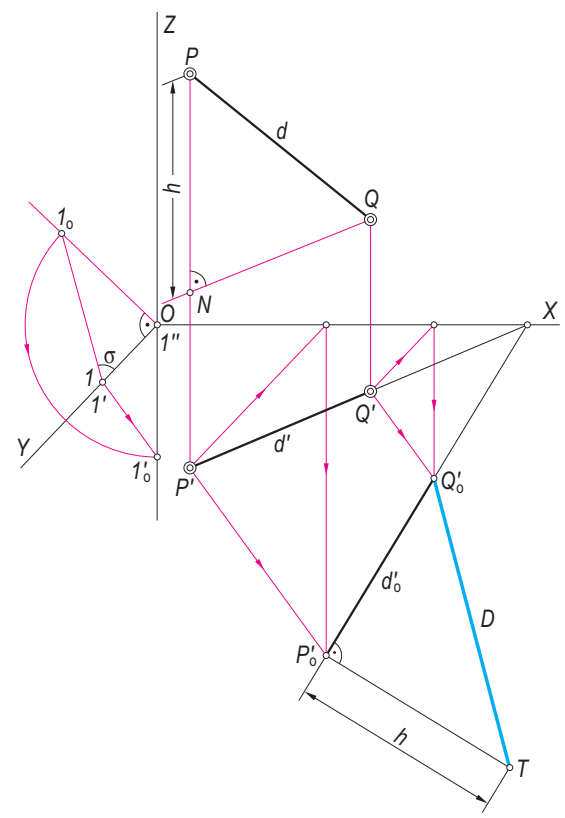


Fig. 12.

9. Perspectiva de figuras planas situadas en planos del sistema

Fig. 13. Representa la perspectiva de un rectángulo y de un triángulo situados en el plano XOY .

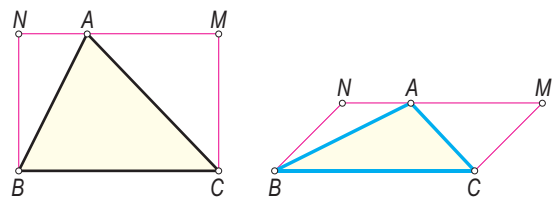


Fig. 13.

Fig. 14. Representa la perspectiva del rectángulo y del trapezio de la izquierda situados en el plano ZOY.

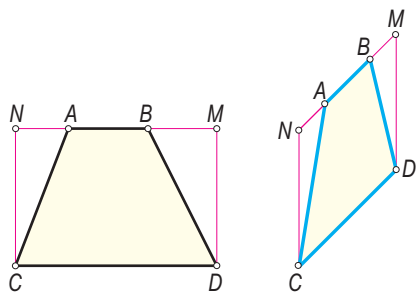


Fig. 14.

Fig. 15. Representa el triángulo en el plano ZOY, obtenido mediante sus cotas.

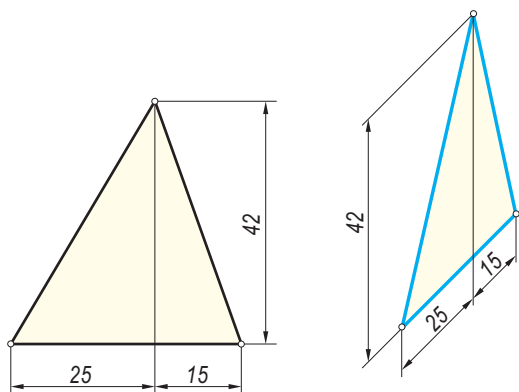


Fig. 15.

Fig. 16. A la izquierda se dibuja un hexágono y en las otras dos figuras se representa el polígono en perspectiva en el plano ZOY y en el plano XOY.

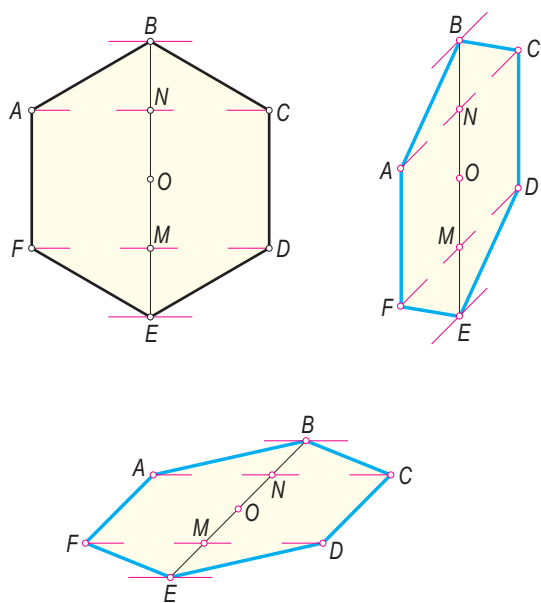


Fig. 16.

Fig. 17. En esta figura se representa un hexágono regular situado en cada uno de los planos del sistema.

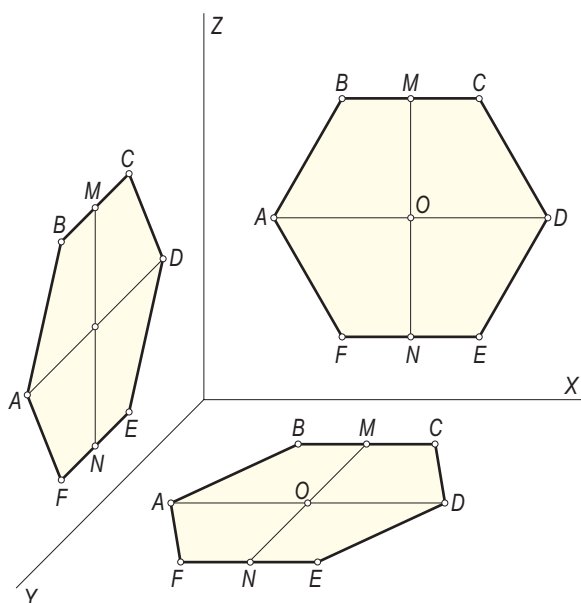


Fig. 17.

Fig. 18. Representa la perspectiva caballera de un pentágono regular situado en el plano XOY, para lo que se ha partido del pentágono $A''-B''-C''-D''-E''$ puesto en verdadera magnitud en el plano del cuadro ZOY.

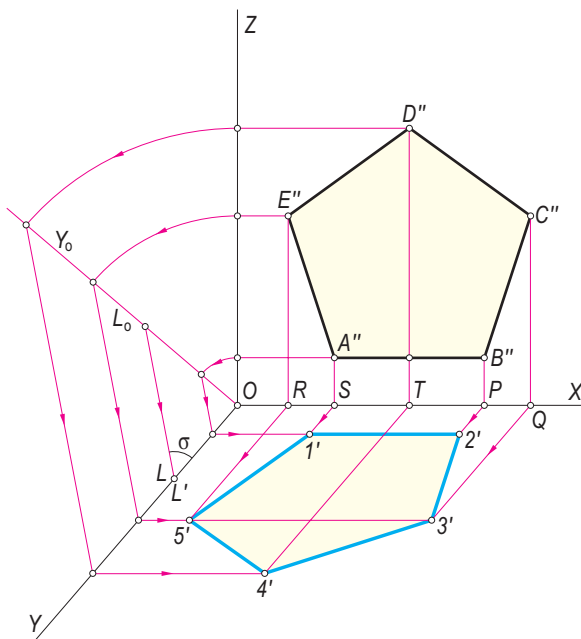


Fig. 18.

Fig. 19. Se dibujan las proyecciones de una circunferencia situada en el plano ZOZ.

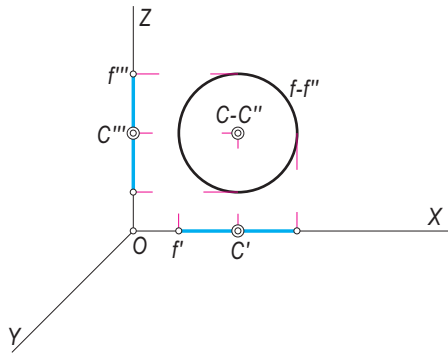


Fig. 19.

Fig. 20. Representa la perspectiva de una curva situada en un plano del sistema.

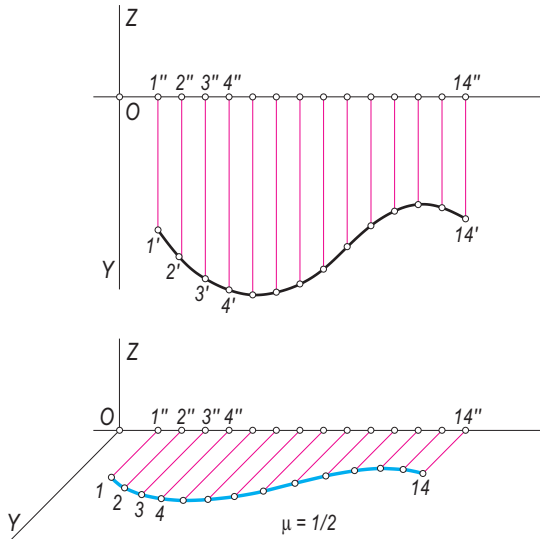


Fig. 20.

Dada una curva situada, por ejemplo, en el plano horizontal del sistema diédrico (parte superior de la figura), para representarla en el plano XOY de caballera, basta pasar, punto a punto de ella, de uno a otro sistema, teniendo en cuenta que las rectas paralelas al eje Y se reducirán según el coeficiente del sistema; tenemos, pues, $1''-2''$ de la figura superior igual a $1'-2'$ de la figura inferior y las rectas $1''-1, 2''-2$, etc., son paralelas al eje Y, pero reducidas.

10. Perspectiva caballera de la circunferencia

La única dificultad que presenta la perspectiva caballera es el trazado de la proyección de la circunferencia, que en los planos YOZ y XOY es una elipse.

En la Fig. 21 se dibuja la perspectiva de la circunferencia de radio R, y se sitúa en cada uno de los planos. Coeficiente de reducción = 0,6.

Se consideran dos diámetros perpendiculares \overline{AB} y \overline{CD} y, para facilitar el trazado, se supone inscrita en el cuadrado N-M-P-Q.

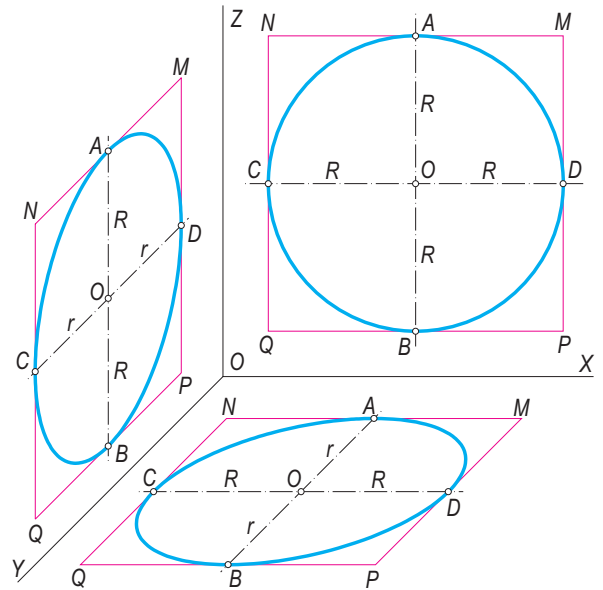


Fig. 21.

- **Circunferencia en el plano ZOZ.** La proyección es la misma circunferencia de radio R. Se indica el cuadrado circunscrito a ella.
- **Circunferencia en el plano XOY.** La proyección es una elipse. Por el centro O se traza \overline{CD} paralelo al eje X, siendo $\overline{OC} = \overline{OD} = R$; por O, se traza \overline{AB} paralelo al eje Y, siendo $\overline{OA} = \overline{OB} = r$ (radio reducido según el coeficiente del sistema). Por paralelas se puede dibujar el romboide N-M-P-Q, cuyos lados son paralelos a los diámetros conjugados \overline{CD} y \overline{AB} de la elipse. Esta elipse, que está inscrita en el romboide, se debe trazar con lápiz, a mano alzada, y después pasarla a tinta con plantilla de curvas. Este es el método más rápido y que menos líneas requiere.
- **Circunferencia en el plano YOZ.** Como en el caso anterior, por O se trazan los diámetros conjugados, \overline{AB} paralelo al eje Z y sin reducir, $\overline{OA} = \overline{OB} = R$, y \overline{CD} , paralelo al eje Y y reducido según el coeficiente elegido, es decir, $\overline{OC} = \overline{OD} = r = 0,6 R$. El trazado de la elipse se hace como en el plano XOY. Piénsese que el hecho de tener que ser la elipse tangente al romboide N-M-P-Q facilita de forma considerable el trazado.

En el caso de elegir un sistema con un coeficiente $\mu = 1$ (caso no recomendado), en el eje Y no habría reducción y las elipses se pueden sustituir por óvalos de forma aproximada; los óvalos resultan algo achatados o recortados respecto a la elipse.

En la **Fig. 22** se sustituye la elipse del plano XOY por un óvalo. Se toman los segmentos $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = R$; se construye el romboide $N-M-P-Q$; por los puntos de tangencia A, D, B y C se trazan las normales o perpendiculares a los lados del romboide; estas perpendiculares se cortan en los puntos C_1, C_2, C_3 y C_4 , que son los centros de curvatura de los arcos del óvalo.

Con el compás y centro en C_1 , se traza el arco $\widehat{C-A}$; con centro en C_3 se traza el arco $\widehat{A-D}$; con centro en C_4 , el arco $\widehat{D-B}$ y con centro en C_2 , el arco $\widehat{B-C}$, que cierra el óvalo.

Este procedimiento sólo sirve para el caso de que no haya reducción sobre el eje Y y además requiere más tiempo y precisión en el trazado.

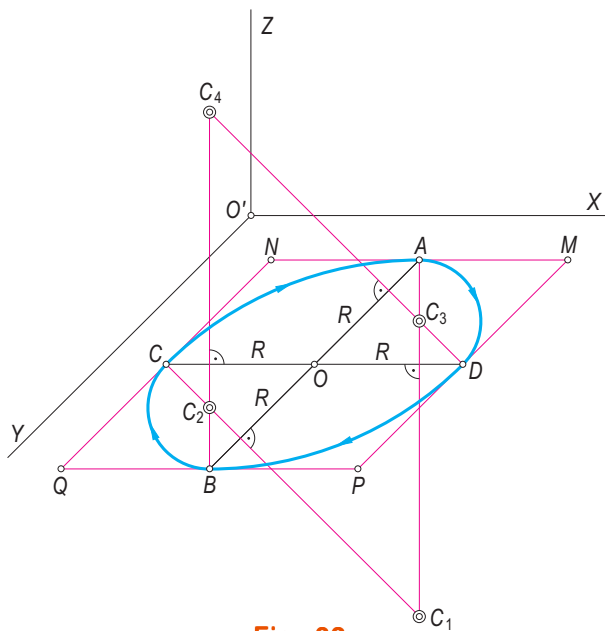


Fig. 22.

El mismo procedimiento se sigue cuando la circunferencia está en el plano YOZ o en planos paralelos a él (**Fig. 23**).

Se recomienda utilizar el método de los diámetros conjugados y ayudarse de las tangentes a la elipse en los extremos de estos diámetros. Las tangentes deben trazarse muy finas y sólo en las proximidades de los puntos de tangencia. Luego, como se ha indicado, se traza la elipse a lápiz, a mano alzada, o bien con plantilla. Para pasar a tinta se utilizará la plantilla de curvas.

En la **Fig. 24** se representa la perspectiva de la circunferencia situada en cada uno de los tres planos del sistema, obteniendo puntos de las elipses por el método de haces proyectivos, ya conocido.

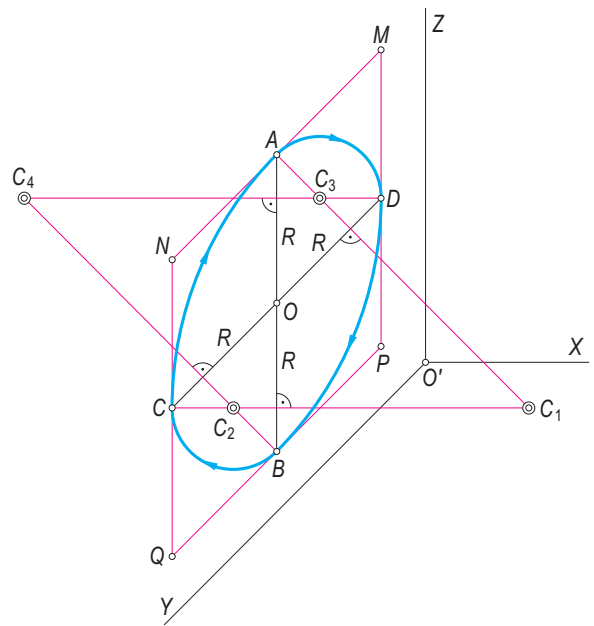


Fig. 23.

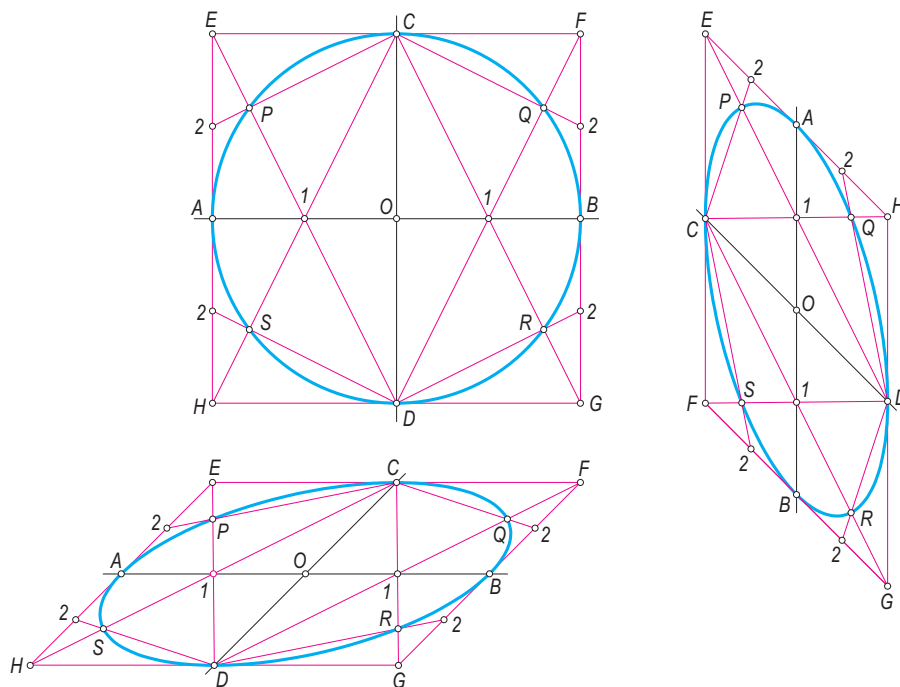
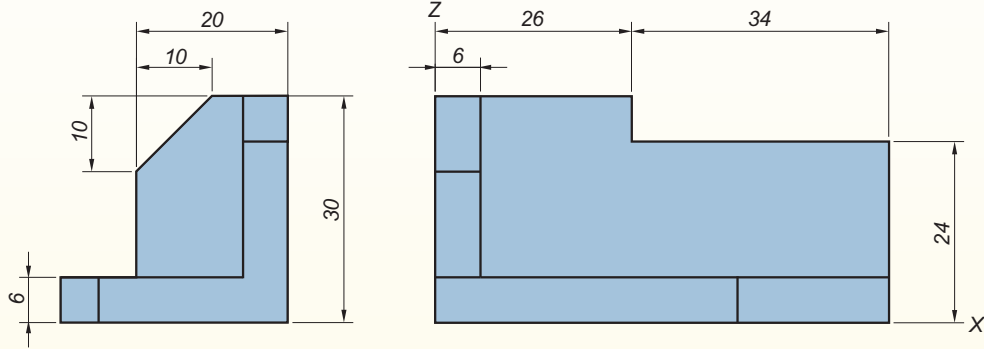


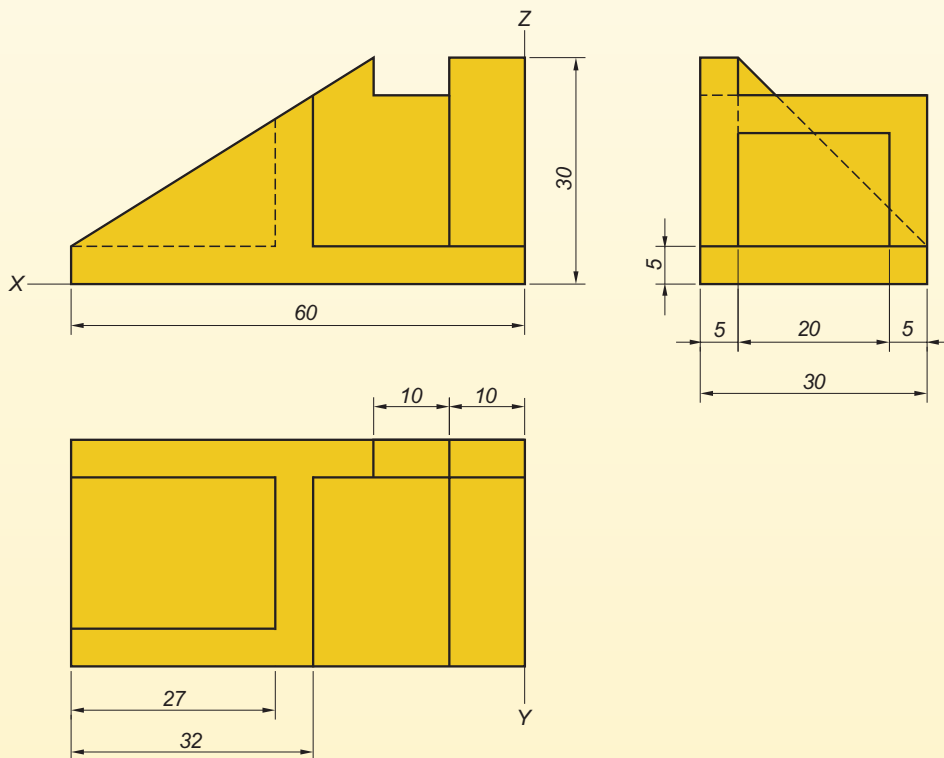
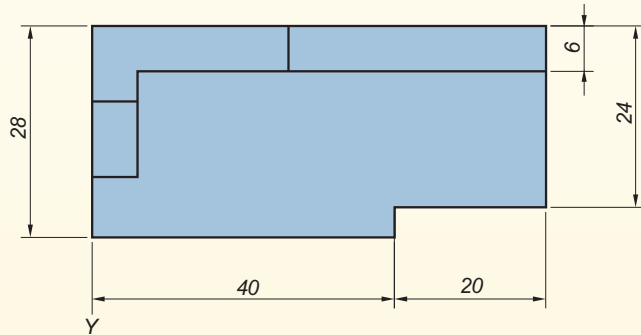
Fig. 24.

ACTIVIDADES

Tenemos dos piezas poliédricas representadas por sus vistas o proyecciones diédricas, alzado, planta y perfil. Dibujar la perspectiva caballera de cada una de ellas, poniendo las líneas ocultas que sean necesarias para la comprensión de las piezas. La escala la elegirá el alumno a tenor del formato de papel disponible.



1



2

Tenemos cuatro piezas reales, representadas con las proyecciones diédricas necesarias para su completa definición. En ellas aparecen superficies curvas. Dibujar la perspectiva caballera eligiendo los ejes que se indican. Los datos del sistema aconsejables son: $\varphi = 135^\circ$, $\sigma = 0,6$. El dibujo puede hacerse a mano alzada o con instrumentos a escala.

